

Numerički model proračuna širina pukotina betonskih elemenata

Jure Radnić, Lada Markota, Alen Harapin

Ključne riječi

betonski element,
numerički model, širina
pukotina, razmak
pukotina, proizvoljni
poprečni presjek,
proklizavanje armature,
eksperimentalna provjera

Key words

Concrete element,
numerical model,
void width,
void spacing, unspecified
cross section,
reinforcement slipping,
experimental verification

Mots clés

élément en béton,
modèle numérique,
largeur des fissures,
espacement des fissures,
coupe en travers arbitraire,
glissement de l'armature,
vérification expérimentale

Ключевые слова

бетонный элемент,
числовая модель,
ширина трещин,
расстояние между
трещинами, произвольное
поперечное сечение,
роскалывание
арматуры

Schlüsselworte:

Betonelement,
numerisches Modell,
Rissbreite, Rissabstand,
beliebiger Querschnitt,
Ableiten der Bewehrung,
experimentale
Überprüfung

J. Radnić, L. Markota, A. Harapin

Izvorni znanstveni rad

Numerički model proračuna širina pukotina betonskih elemenata

Prikazan je opći model proračuna širina pukotina klasično armiranih, prednapetih i spregnutih betonskih elemenata opterećenih na savijanje. Presjeci mogu biti proizvoljnog oblika, s proizvoljnim položajem armature i ekscentrične vanjske sile, te s mogućnošću sprežanja u više faza. Izloženi model i razvijeni proračunski program CW testirani su na rezultatima provedenih eksperimentalnih ispitivanja armanobetonkih elemenata opterećenih na čisto savijanje i centrični vlak.

J. Radnić, L. Markota, A. Harapin

Original scientific paper

Numerical model for calculating width of voids in concrete elements

A general model for calculating width of voids in traditionally reinforced, prestressed composite concrete elements subjected to bending load is presented. Cross sections can be of any shape, with any position of reinforcement and eccentric external force, and the bonding may be conducted in several phases. The exposed model and the specially developed computer program CW were checked with results of experimental testing of reinforced-concrete elements subjected to pure bending and centric tension.

J. Radnić, L. Markota, A. Harapin

Ouvrage scientifique original

Modèle numérique de calcul de la largeur des fissures dans les éléments en béton

L'article présente un modèle général de calcul de la largeur des fissures dans les éléments armés, précontraints et mixtes en béton, réalisés de façon classique, soumis à flexion. Les coupes peuvent avoir des formes arbitraires, avec une disposition arbitraire de l'armature et des forces excentriques externes, avec la possibilité de réalisation de la construction mixte en plusieurs phases. Le modèle exposé et le logiciel développé CW ont été testés sur les résultats des essais expérimentaux des éléments en béton armé soumis à la flexion pure et à la traction centrique.

Ю. Раднич, Л. Маркота, А. Харাপин

Оригинальная научная работа

Числовая модель расчёта ширины трещин бетонных элементов

В работе описана общая модель расчёта ширины трещин классически армированных, предварительно напряжённых и соединённых бетонных элементов, нагружённых на изгиб. Сечения могут быть произвольной формы, с произвольным положением арматуры и эксцентрической внешней силы, а также с возможностью связи в большее число фаз. Исложенные модель и развитая расчётная системы CW испытаны на результатах проведённых экспериментальных испытаний железобетонных элементов, нагружённых на чистый изгиб и центрическое растяжение.

J. Radnić, L. Markota, A. Harapin

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Numerisches Modell für die Berechnung der Rissbreiten von Betonelementen

Dargestellt ist ein allgemeines Modell für die Berechnung von Rissbreiten für klassisch bewehrte, vorgespannte und verbundene Betonelemente bei Biegebeanspruchung. Die Querschnitte können eine beliebige Form, Lage der Bewehrung und der exzentrischen Aussenkraft aufweisen, auch besteht die Möglichkeit des Verbundes in mehreren Phasen. Das dargestellte Modell und das Berechnungsprogramm CW wurde an den Ergebnissen der durchgeführten experimentalen Untersuchungen von Stahlbetonelementen, beansprucht durch reine Biegung und zentrischen Zug, testiert.

Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radnić**, dipl. ing. građ.; mr. sc. **Lada Markota**, dipl. ing. građ.; doc. dr. sc. **Alen Harapin**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Matice hrvatske 15

1 Općenito

Uobičajeni inženjerski postupci proračuna širina pukotina armiranobetonskih elemenata odnose se gotovo isključivo samo na klasično armirani beton, slučajevite s jednostavnom geometrijom i armaturom presjeka te jednostavnija stanja naprezanja. Ipak, za mnoge praktične probleme ovi postupci daju pouzdane rezultate. Na žalost, kod složenijih problema oni su neupotrebljivi.

U ovom je radu izložen jedan opći numerički model proračuna širina pukotina armiranobetonskih elemenata opterećenih ekscentričnom uzdužnom silom. Pri tome presjeci mogu biti proizvoljnog oblika i rasporeda armature (klasična, prednapeta, kruta), s proizvoljnim položajem ekscentrične uzdužne sile (koso savijanje) te s mogućnošću nastajanja (sprezanja) presjeka u više faza. Razvijena su tri podmodela proračuna, ovisno o usvojenoj vezi napon prijanjanja (τ) – proklizavanje armature (Δ). Izloženi model i razvijeni proračunski program CW testirani su eksperimentalno provedenim ispitivanjima više klasično armiranih betonskih elemenata opterećenih na centrični vlak i čisto savijanje. Iako je model prvenstveno namijenjen primjeni pri uporabnim opterećenjima, širine pukotina moguće je uspješno simulirati do pred sam slom konstrukcije.

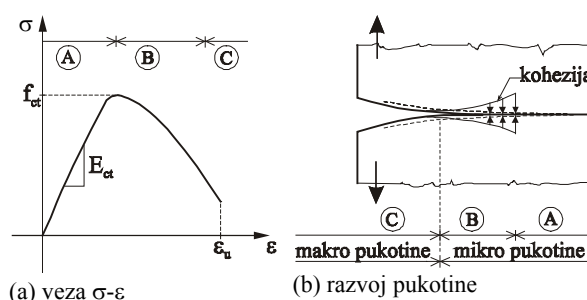
2 Metodologija rješenja problema

Metodološki pristup rješenju problema je sljedeći:

- Polazi se od poznatog naponsko – deformacijskog stanja presjeka na mjestu ravnine pukotine i u sredini razmaka pukotina, određenog s pomoću prethodno razvijenog modela za dimenzioniranje kompozitnih poprečnih presjeka [2].
- Pretpostavljena je krivulja razdiobe naprezanja i deformacija armature i betona između dviju uzastopnih pukotina. Razlika naprezanja armature u ravnini pukotine i u sredini razmaka dviju susjednih pukotina prenosi se naponima prijanjanja na okolni beton.
- Na osnovi pretpostavljene veze τ - Δ za armaturu, formira se više podmodela za proračun širina i razmaka pukotina.
- Za svaki se podmodel postavljaju jednadžbe ravnoteže, kojima su nepoznanice širina i razmak pukotina.
- Postavljene se jednadžbe rješavaju direktno ili iterativno, u ovisnosti o složenosti veze τ - Δ .
- Provode se određena eksperimentalna ispitivanja širina i razmaka pukotina klasično armiranih betonskih elemenata za provjeru razvijenoga numeričkog modela proračuna.

3 Osnove ponašanja betona u vlaku

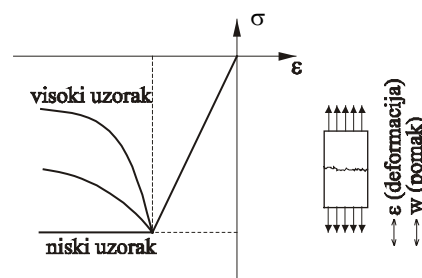
Za adekvatno modeliranje širina pukotina betonskih elemenata, od izuzetno je značaja poznavanje ponašanja betona u vlaku. Karakteristična veza između jednoosnog vlačnog naprezanja σ i deformacije betona ϵ prikazana je na slici 1.a. Ona je gotovo linearna sve do dostizanja vlačne čvrstoće betona f_{ct} , nakon čega se javlja tzv. omekšanje materijala. Početni modul elastičnosti betona u vlaku E_{ct} nešto je manji od onoga u tlaku E_{cc} . Eksperimentalna su istraživanja pokazala da vlačna čvrstoća betona značajno ovisi o veličini uzorka, te da oblik veze σ - ϵ nakon dostizanja maksimalne vlačne čvrstoće izrazito ovisi o tzv. lokalizaciji deformacija, što je shematski prikazano na slici 2.



Slika 1. Karakteristično ponašanje betona u vlaku

Kada se deformacija mjeri na kratkom potezu, odnosno pri maloj visini uzorka, veza σ - ϵ bliska je elasto-plastičnom ponašanju, dok u slučaju visokih uzoraka ona teži elasto-krutom ponašanju. Stoga ponašanje betona u vlaku u okviru neke konstrukcije treba promatrati u kontekstu njezine veličine.

U zoni pucanja betona (slika 1.b), s porastom vlačnog naprezanja dolazi do razvoja vrlo sitnih mikropukotina. Dostizanjem vlačne čvrstoće, mikropukotine se šire i množe, što uzrokuje opadanje naprezanja i povećanje deformacija. Dostizanjem granične deformacije ϵ_u , mikropukotine se ujedinjuju u jednu dominantnu glavnu (makro) pukotinu. Izvan ravnine glavne pukotine, koja je približno okomita na pravac glavnoga vlačnog naprezanja zbog rasterećenja materijala dolazi do stabiliziranja i čak do zatvaranja lokalnih mikropukotina.



Slika 2. Utjecaj lokalizacije deformacija na σ - ϵ vezu betona u vlaku

U slučaju armiranog betona, armatura koja prolazi kroz ravninu pukotine utječe na njezin razvoj i širinu. Mehanizam razvoja pukotina i ponašanje raspucanog betona između pukotina veoma su složeni. Zbog razlike u naprezanju armaturene šipke i okolnog betona, dolazi do relativnog pomaka (proklizavanja) između betona i armature. Veličina proklizavanja ovisi o velikom broju faktora (razini naprezanja, kvaliteti betona, kvaliteti i vrsti armature, promjeru i razmaku šipki i sl.) i teško ju je odrediti. Osim pojave primarnih globalnih pukotina vidljivih na licu betona, dolazi do razvoja sekundarnih pukotina u betonu na spoju s armaturom (osobito u zonama orebrenja šipke). Dakle, očito je da u ispucanoj vlačnoj zoni armiranog betona nema više kompatibilnosti pomaka armature i okolnog betona. Relativna pomicanja između betona i armature očito su najveća u zoni pukotina, a najmanja po sredini razmaka pukotina. Dakle, beton oko armaturnih šipki ne može u potpunosti pratiti globalne uzdužne vlačne deformacije armature pod prirastom opterećenja, već dolazi do njegova relativnog pomaka. On je najveći na mjestu otvaranja pukotine. Relativni pomak (deformacija) betona u odnosu na armaturu smanjuje mu globalnu vlačnu deformaciju od djelovanja vanjskog opterećenja, što ima za posljedicu mogućnost njegova daljnjeg vlačnog nošenja između pukotina. Ukupna je najveća nosivost betona, ali i najveća vlačna deformacija, u sredini razmaka pukotina. S porastom vanjskog opterećenja, kada dođe do prekoračenja maksimalne vlačne deformacije betona, dolazi do otvaranja novih pukotina približno u sredini razmaka prethodno otvorenih pukotina.

Mehanizam pojave i razvoja pukotina u betonu veoma je složen i još uvijek nedovoljno fizikalno razjašnjen, pa i ne iznenađuje da su postojeći modeli proračuna razmaka i širina pukotina još uvijek jako pojednostavljeni.

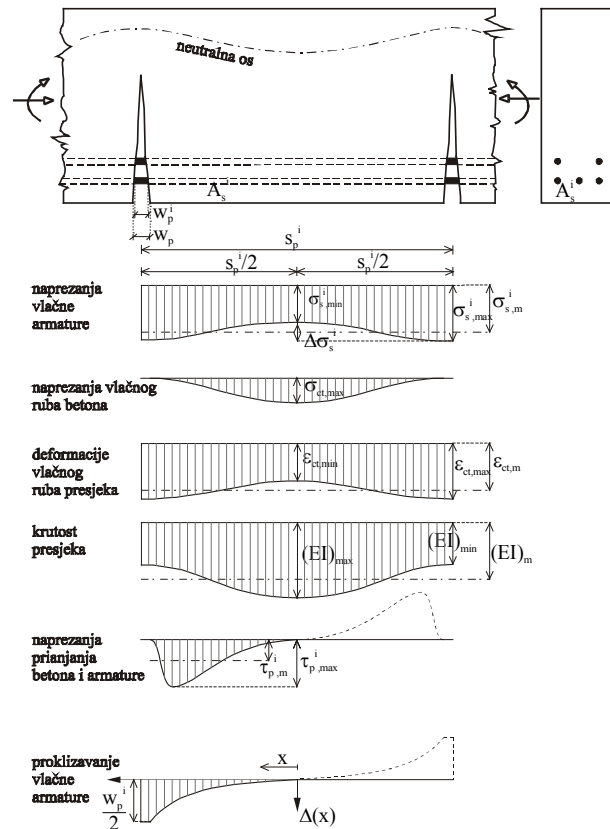
4 Razdioba naprezanja i deformacija između dviju uzastopnih pukotina

Usvojena razdioba naprezanja i deformacija između dviju uzastopnih pukotina nekog armiranobetonskog elementa izloženog savijanju prikazana je na slici 3.

Srednja vrijednost vlačnog naprezanja u promatranoj šipci armature između pukotina $\sigma_{s,m}^i$ aproksimirana je izrazom:

$$\sigma_{s,m}^i = \sigma_{s,\max}^i - \frac{3}{8}(\sigma_{s,\max}^i - \sigma_{s,\min}^i) \quad (1)$$

gdje $\sigma_{s,\max}^i$ označava naprezanje armature u ravnini pukotine, $\sigma_{s,\min}^i$ naprezanje armature u sredini razmaka pukotina, a i promatranu šipku armature. Srednja deformacija vlačnog ruba presjeka između pukotina $\varepsilon_{ct,m}$ aproksimirana je na isti način, tj. s pomoću:



Slika 3. Usvojena razdioba naprezanja i deformacija između dviju uzastopnih pukotina

$$\varepsilon_{ct,m} = \varepsilon_{ct,\max} - \frac{3}{8}(\varepsilon_{ct,\max} - \varepsilon_{ct,\min}) \quad (2)$$

gdje $\varepsilon_{ct,\max}$ označava rubnu deformaciju betona u ravnini pukotine, a $\varepsilon_{ct,\min}$ rubnu deformaciju betona u sredini razmaka pukotina. Analogno prethodno navedenom, prosječna krutost presjeka na savijanje $(EI)_m$ aproksimirana je s pomoću:

$$(EI)_m = (EI)_{\max} - \frac{5}{8}[(EI)_{\max} - (EI)_{\min}] \quad (3)$$

gdje $(EI)_{\min}$ označava tangentnu krutost presjeka na mjestu pukotine, a $(EI)_{\max}$ tangentnu krutost presjeka u sredini razmaka pukotina.

Proklizavanje Δ pojedine šipke armature u odnosu na okolni beton između pukotina aproksimirano je izrazom:

$$\Delta = 2 \frac{w_p^i}{(s_p^i)^2} x^2 \quad (4)$$

gdje w_p^i označava širinu pukotine na mjestu promatrane šipke, a s_p^i teorijski minimalnu duljinu duž koje se prenose naponi pririjanja. Proklizavanje šipke na

mjestu pukotine jednaka je polovici širine pukotine na tom mjestu, tj.:

$$\Delta_{(x=s_p^i/2)} = \frac{w_p^i}{2} \quad (5)$$

Budući da je približno:

$$w_p^i = \frac{\varepsilon_{s,\max}^i}{\varepsilon_{ct,\max}} w_p \quad (6)$$

gdje w_p označava širinu pukotine na licu betona i $\varepsilon_{s,\max}^i$ deformaciju promatrane šipke na mjestu pukotine, izraz (4) može se napisati u obliku:

$$\Delta = 2 \frac{\varepsilon_{s,\max}^i}{\varepsilon_{ct,\max}} \frac{w_p}{(s_p^i)^2} x^2 \quad (7)$$

5 proračun naprezanja i deformacija ab presjeka u ravnini pukotine i u sredini razmaka pukotina

Proračun naprezanja i deformacija presjeka na mjestu ravnine pukotine i u polovici razmaka pukotina izvršen je s pomoću prethodno razvijenog modela dimenzioniranja općih kompozitnih presjeka [2]. Ovaj model dopušta primjenu proizvoljne veze σ - ε za pojedini materijal. Poželjno je da usvojena veza σ - ε bude što bliža stvarnom ponašanju materijala. Valja napomenuti da ovaj model pretpostavlja punu kompatibilnost pomaka betona i armature, što ne odgovara stvarnom stanju. Velik utjecaj na dobivene rezultate ima odabir adekvatnog σ - ε dijagrama betona, a osobito onog u vlaku. Ukratko ćemo razmotriti neke prikladne računске σ - ε dijagrame za beton.

5.1 Dijagram σ - ε betona u tlaku

U nedostatku eksperimentalno utvrđenog σ - ε dijagrama betona u tlaku, može se s dostatnom pouzdanošću primijeniti onaj prema EC-2 [3] (slika 4.). Pritom su naprezanja betona definirana izrazom:

$$\sigma_c = f_{cc} \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad (8)$$

gdje je:

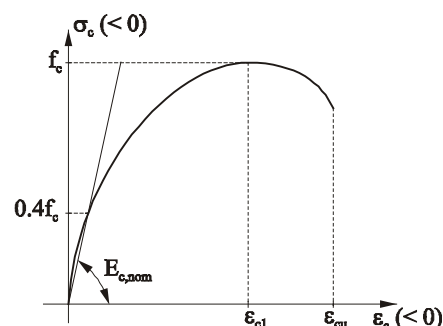
$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{c1} = -0,0022$$

$$k = 1.1 E_{c,nom} \varepsilon_{c1} / f_c$$

U gornjim izrazima f_{cc} označuje računsku tlačnu čvrstoću betona (uvrštenu s negativnom vrijednošću), ε_{c1} tlačnu deformaciju pri dostizanju maksimalnih napre-

zanja, ε_{cu} graničnu tlačnu deformaciju pri drobljenju betona i $E_{c,nom}$ računsku vrijednost sekantnog modula elastičnosti. Rabi se isti dijagram σ - ε za proračun naponsko – deformacijskog stanja presjeka u ravnini pukotine i u polovici razmaka pukotina.

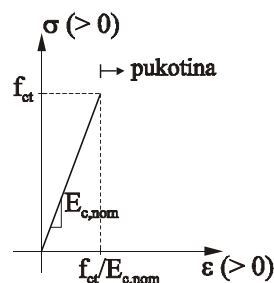


Slika 4. Moguća veza σ - ε betona u tlaku

5.2 Dijagram σ - ε betona u vlaku

a) Presjek u ravnini pukotine

U ravnini pukotine očito je prekoračena vlačna čvrstoća betona, odnosno prekoračena je granična vlačna deformacija iznad koje nastaju pukotine. Stoga je logično da se ovdje rabi radni dijagram betona prema slici 5. Modul elastičnosti betona $E_{c,nom}$ može se uzeti kao i onaj u tlaku.



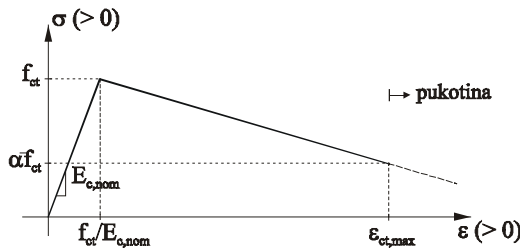
Slika 5. Moguća veza σ - ε betona u vlaku u ravnini pukotine

b) Presjek u sredini razmaka pukotina

U sredini razmaka pukotina očito nije prekoračena granična vlačna deformacija iznad koje nastaje vidljiva globalna (makro) pukotina, odnosno još preostaje značajna vlačna nosivost betona nakon dostizanja vlačne čvrstoće betona f_{ct} . Treba još jednom napomenuti da dostizanjem f_{ct} ne dolazi do otvaranja vidljive globalne pukotine, već se formiraju nevidljive mikropukotine koje imaju za posljedicu opadanje vlačne otpornosti betona. Ona postupno iščezava dosežanjem granične vlačne deformacije $\varepsilon_{ct,\max}$, kada nevidljive unutrašnje mikropukotine rezultiraju u vidljivu makropukotinu.

Računski σ - ε dijagram betona u vlaku može se primjeniti usvojiti prema slici 6. Pritom $\varepsilon_{ct,\max}$ i $\bar{\alpha}$ ovise o vrsti

betona, dimenzijama elementa, vrsti opterećenja (savijanje, vlak) i drugim faktorima.



Slika 6. Moguća veza σ - ϵ betona u vlak u polovini razmaka pukotina

Valja imati na umu da usvojeni model proračuna naprezanja u presjeku [2] pretpostavlja punu kompatibilnost pomaka betona i armature, što ne odgovara stvarnosti. Stoga usvojeni oblik σ - ϵ dijagrama betona prema slici 6. treba tretirati kao računski (zamjenjujući), a ne stvarni.

Očito je da bi primjerice elastoplastično ponašanje prema slici 6. ($\bar{\alpha}=1$) imalo za posljedice manja računska naprezanja u armaturi u odnosu na slučajeve kada je $\bar{\alpha}<1$. Odnosno, razlika naprezanja u armaturi između pukotina dobivena s dijagramima betona prema slikama 5. i 6. bila bi tada najveća. Kako se prema usvojenom pristupu razlika naprezanja armature prenosi na okolni beton, očito je da bi usvojeno elastoplastično ponašanje betona u polovici razmaka pukotina imalo za posljedice najveće širine pukotina.

6 Proračun razmaka pukotina

Razlika vlačnog naprezanja pojedine šipke armature na mjestu ravnine pukotine i u sredini razmaka pukotina, kao što je već navedeno, prenosi se na okolni beton preko napona prijanjanja, tj. vrijedi:

$$\Delta\sigma_s^i A_s^i = \int_0^{s_p^i/2} \tau_p^i \phi^i \pi dx \quad (10)$$

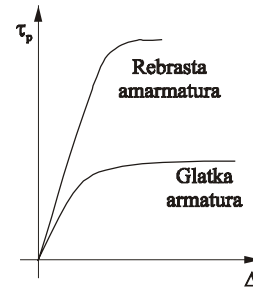
gdje je:

$$\Delta\sigma_s^i = \sigma_{s,max}^i - \sigma_{s,min}^i \quad (11)$$

U gornjim izrazima $\Delta\sigma_s^i$ označuje razliku naprezanja promatrane šipke armature između ta dva presjeka, A_s^i površinu šipke, ϕ^i promjer šipke, s_p^i teorijski minimalni razmak na kojemu se sila sa šipke prenosi na beton i τ_p napon prijanjanja.

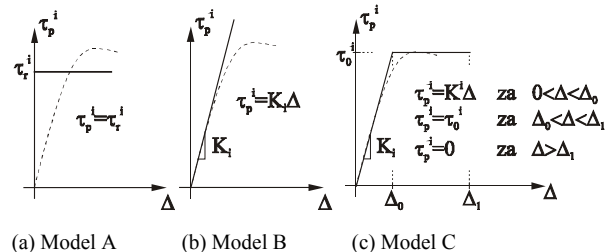
Naponi prijanjanja betona i armature ovise o brojnim faktorima, a osobito o kvaliteti betona, vrsti armature, profilu i razmaku šipki, uvjetima prionjivosti i sl. Veza

između proklizavanja armature Δ i napona prijanjanja τ_p kvalitativno je prikazana na slici 7. [4]. Uporabljene su različite računске veze τ_p - Δ u numeričkim analizama.



Slika 7. Stvarna veza τ_p - Δ

U ovom su radu uporabljena tri računska oblika veze τ_p - Δ (slika 8.), na temelju kojih su izvedena tri podmodela proračuna razmaka širina pukotina.



(a) Model A (b) Model B (c) Model C

Slika 8. Usvojeni računski oblik veze τ_p - Δ

6.1 Model A

U ovom je modelu (slika 8.a) veza τ_p - Δ definirana s:

$$\tau_p^i = \tau_r^i \quad (12)$$

pa se sila prijanjanja pojedine šipke armature i betona može izraziti s pomoću:

$$\int_0^{s_p^i/2} \tau_p^i \phi^i \pi dx = \tau_r^i \phi^i \pi \frac{s_p^i}{2} \quad (13)$$

gdje τ_r^i označava prosječnu računsku čvrstoću prijanjanja. Ako se uzmu u obzir sve šipke koje prolaze kroz ravninu pukotine, uvrštavanjem (13) u (10) slijedi:

$$\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_s^i A_s^i = \sum_{i=1}^n \tau_r^i \phi^i \pi \frac{s_p^i}{2} \quad (14)$$

Uz oznaku:

$$\frac{s_p}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{s_p^i}{2} \quad (15)$$

i nakon uvrštavanja (15) u (14) slijedi:

$$s_p = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_s^i}{\tau_r^i} \phi^i \quad (16)$$

U gornjem izrazu s_p označava minimalni razmak pukotina, odnosno dvostruku vrijednost prosječne minimalne duljine prijenosa posmične sile svih šipki, a n broj šipki koji prolaze kroz ravninu pukotine.

Ako čvrstoća prionjivosti nije utvrđena eksperimentalno, može se primjerice usvojiti prema [3]. Pritom je ona uzeta da iznosi:

$$\tau_r = (0,36\sqrt{f_{ck}}) / \gamma_c \text{ - glatke šipke} \quad (17)$$

$$\tau_r = (2,25f_{ctk;0,05}) / \gamma_c \text{ - rebraste šipke} \quad (18)$$

Navedeni izrazi vrijede za tzv. dobre uvjete prijanjanja, dok se za ostale slučajeve dobivene vrijednosti τ_r trebaju pomnožiti s 0,7 (f_{ck} i $f_{ctk;0,05}$ treba uvrstiti u N/mm^2).

Ako djeluje poprečni tlak p , mogu se računске vrijednosti τ_r povećati faktorom:

$$\frac{1}{(1 - 0,04p)} \leq 1,4 \quad (19)$$

gdje je p srednji poprečni tlak okomito na pravac pružanja šipke (u N/mm^2).

6.2 Model B

U ovom je modelu (slik 8.b) veza τ_p - Δ definirana s:

$$\tau_p^i = K^i \Delta \quad (20)$$

gdje K^i označava modul klizanja promatrane šipke armature, koji se može eksperimentalno utvrditi.

Ako se (20) uvrsti u (10), slijedi:

$$\Delta \sigma_s^i A_s^i = \int_0^{s_p^i/2} K^i \Delta \phi^i \pi dx \quad (21)$$

Ako se (7) uvrsti u (21), nakon sređivanja dobiva se:

$$\Delta \sigma_s^i A_s^i = \frac{\pi w_p}{12 \varepsilon_{ct,max}} \phi^i K^i \varepsilon_{s,max}^i s_p^i \quad (22)$$

Ako se uvede sumacija preko svih šipki koje prolaze kroz ravninu pukotine, slijedi:

$$s_p = \frac{3\varepsilon_{ct,max}}{nw_p} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_s^i \phi^i}{K^i \varepsilon_{s,max}^i} \quad (23)$$

U navedenom izrazu s_p ponovno označuje minimalni razmak pukotina, odnosno dvostruku vrijednost prosječ-

ne minimalne duljine prijenosa posmične sile svih šipki koje prolaze kroz ravninu pukotine.

Dok se s_p može direktno izračunati iz izraza (16), dotle je on u (23) linearna funkcija širine pukotine w_p .

6.3 Model C

Veza τ_p^i - Δ u ovom je modelu uzeta oblika (slika 8.c):

$$\tau_p^i = K^i \Delta \quad \text{za } 0 < \Delta < \Delta_0$$

$$\tau_p^i = \tau_0 \quad \text{za } \Delta_0 < \Delta < \Delta_1 \quad (24)$$

gdje K^i označava modul klizanja promatrane šipke armature.

Granice integriranja mogu se odrediti iz (7):

$$s_0^i = \sqrt{\frac{\Delta_0^i \varepsilon_{ct,mcx}}{2w_p \varepsilon_{s,max}^i}} s_p^i \leq \frac{s_p^i}{2} \quad (25)$$

$$s_1^i = \sqrt{\frac{\Delta_1^i \varepsilon_{ct,mcx}}{2w_p \varepsilon_{s,max}^i}} s_p^i \leq \frac{s_p^i}{2} \quad (26)$$

gdje je $\Delta_0^i = \frac{\tau_0^i}{K^i}$, a Δ_1^i označava pomak iznad kojeg

iščezavaju naponi prijanjanja i koji se može eksperimentalno utvrditi. Sada se može provesti integraciju prema (10):

$$\Delta \sigma_s^i A_s^i = \int_0^{s_0^i} K^i \Delta \phi^i \pi dx + \int_{s_0^i}^{s_1^i} \tau_0^i \phi^i \pi dx \quad (27)$$

Ako se s α^i i β^i označi:

$$\alpha^i = \sqrt{\frac{\Delta_0^i \varepsilon_{ct,mcx}}{2w_p \varepsilon_{s,max}^i}} \leq \frac{1}{2} \quad (28)$$

$$\beta^i = \sqrt{\frac{\Delta_1^i \varepsilon_{ct,mcx}}{2w_p \varepsilon_{s,max}^i}} \leq \frac{1}{2} \quad (29)$$

integriranjem jednadžbe (27), slijedi:

$$\Delta \sigma_s^i \frac{(\phi^i)^2 \pi}{4} = 2\pi \frac{w_p}{\varepsilon_{ct,max}} \cdot \frac{1}{3} K^i \phi^i \varepsilon_{s,max}^i (\alpha^i)^3 s_p^i + \tau_0^i \phi^i \pi (\beta^i - \alpha^i) s_p^i \quad (30)$$

Ako se uvede sumacija preko svih šipki koje prolaze kroz ravninu pukotine, uz uključenje (15), slijedi:

$$s_p = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_s^i \phi^i}{(\alpha^i)^3 \frac{2}{3} \frac{w_p}{\varepsilon_{ct,max}} K^i \varepsilon_{s,max}^i + (\beta^i - \alpha^i) \tau_0^i} \quad (31)$$

Iz (31) je vidljivo da je s_p nelinearna funkcija od w_p i ponovno označava minimalni razmak pukotina.

7 Proračun širine pukotina

Širina promatrane pukotine w_p može se približno izraziti s pomoću:

$$w_p = 0 \quad \text{za } \varepsilon_{ct,m} \leq \varepsilon_{cp} \quad (32)$$

$$w_p = (\varepsilon_{ct,m} - \varepsilon_{cp}) s_p \quad \text{za } \varepsilon_{ct,m} > \varepsilon_{cp} \quad (33)$$

gdje je:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{f_{ct}}{E_c} \quad (34)$$

U gornjim izrazima ε_{cp} označuje računsku deformaciju betona pri pojavi pukotine, a f_{ct} računsku vlačnu čvrstoću betona. Budući da s_p predstavlja teorijski minimalni razmak pukotina, w_p označuje minimalnu širinu pukotine. Kako je maksimalni mogući razmak pukotina otprilike $2s_p$, prosječni je razmak pukotina s_{rm} :

$$s_{rm} = 1,5 s_p \quad (35)$$

pa tako je prosječna širina pukotina:

$$w_m = 1,5 w_p \quad (36)$$

Za tzv. karakterističnu širinu pukotina w_k usvaja se vrijednost koja je 70% veća od w_m , tj.:

$$w_k = 1,7 w_m \quad (37)$$

Pri proračunu praktičnih armiranobetonskih konstrukcija, w_k treba biti manja od tzv. granične širine pukotina w_g koja je definirana odgovarajućim propisima.

7.1 Model A

U ovom se modelu s_p izračuna direktno s pomoću (16), a potom w_p također direktno iz (33).

7.2 Model B

Budući da je u (23) s_p funkcija od w_p , to se uzimanjem u obzir (33) dobiva:

$$w_p = \sqrt{(\varepsilon_{ct,m} - \varepsilon_{cp}) \frac{3\varepsilon_{ct,max}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_s^i \phi^i}{K^i \varepsilon_{s,max}^i}} \quad (38)$$

nakon čega se s_p može izračunati s pomoću (23).

Ovaj model, zbog linearne veze $\tau_p - \Delta$, daje dobre rezultate samo u slučaju manjih širina pukotina, odnosno za niže razine naprezanja.

7.3 Model C

Budući da je u (31) s_p nelinearna funkcija od w_p , dobiva se uzimajući u obzir (33) sustav od dvije nelinearne jednadžbe oblika:

$$(\varepsilon_{ct,m} - \varepsilon_{cp}) s_p - w_p = 0 \quad (39)$$

$$s_p = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_s^i \phi^i}{(\alpha^i)^3 \frac{2}{3} \frac{w_p}{\varepsilon_{ct,max}} K^i \varepsilon_{s,max}^i + (\beta^i - \alpha^i) \tau_0^i}$$

s nepoznicama w_p i s_p . Sustav jednadžbi (39) rješava se iterativno, a koeficijenti α i β uvijek moraju biti manji od 0,5.

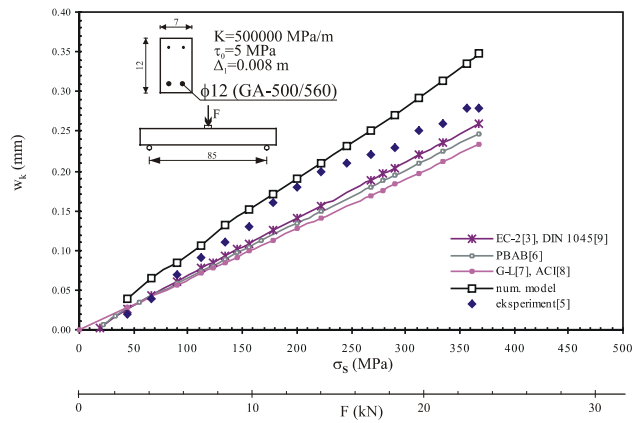
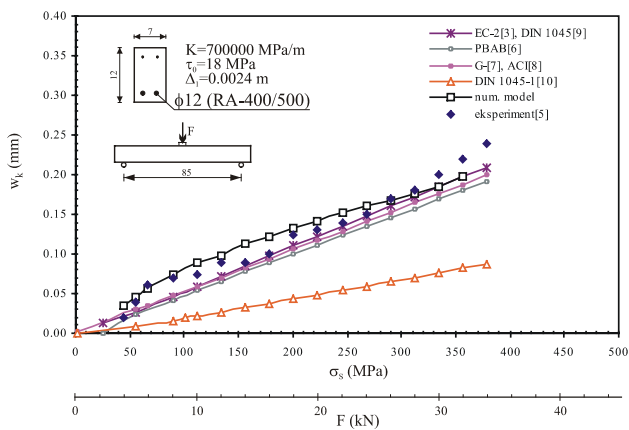
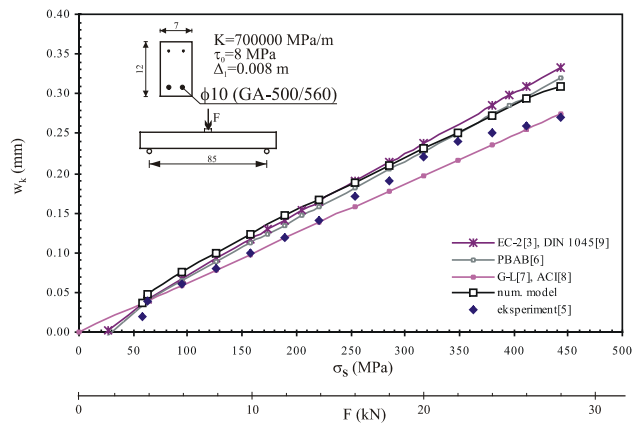
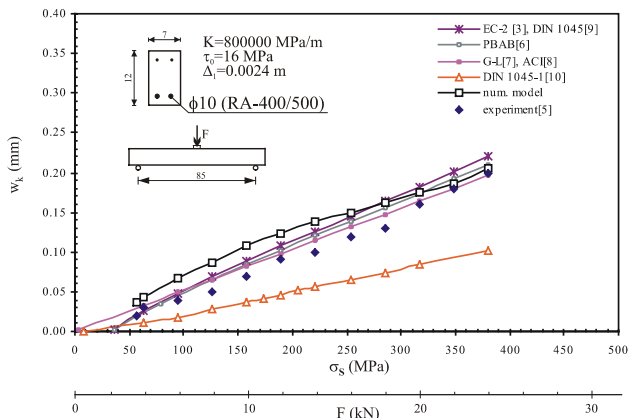
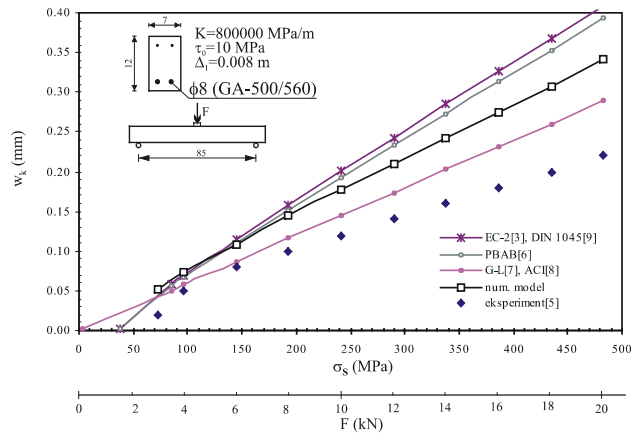
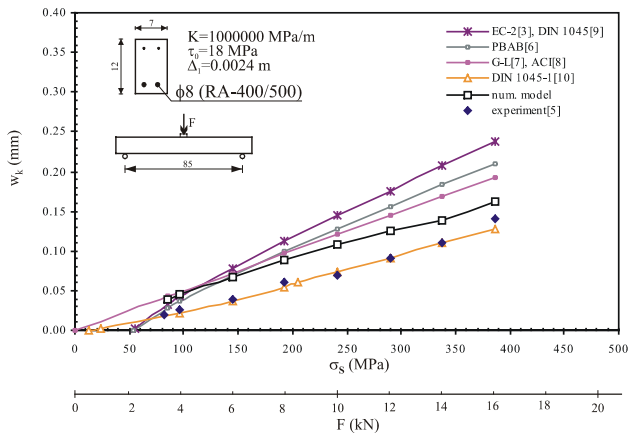
Ovaj model, zbog prilično realne veze $\tau_p - \Delta$, daje dobre rezultate i za slučajeve većih širina pukotina, odnosno većih razina naprezanja armature.

8 Verifikacija izloženog numeričkog modela

8.1 Primjer 1.

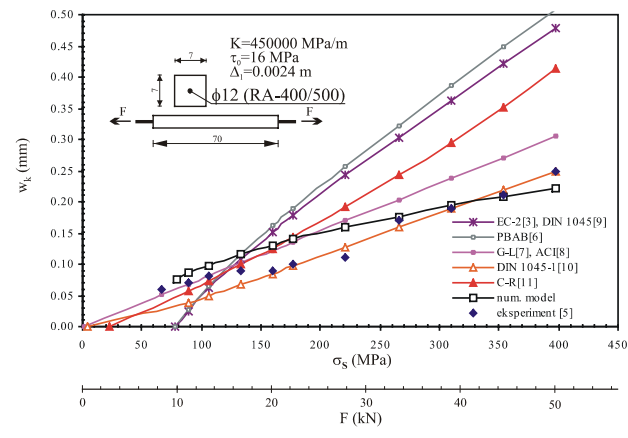
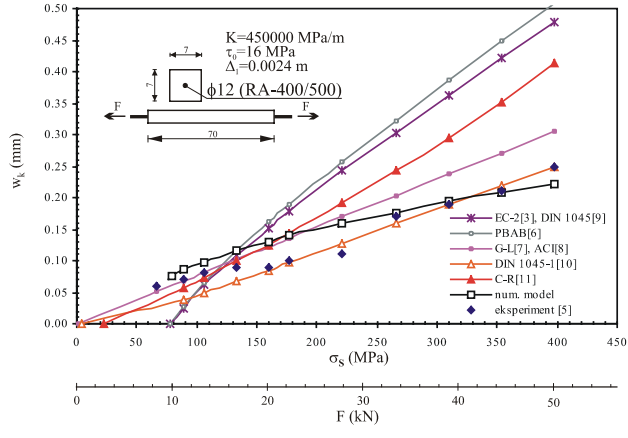
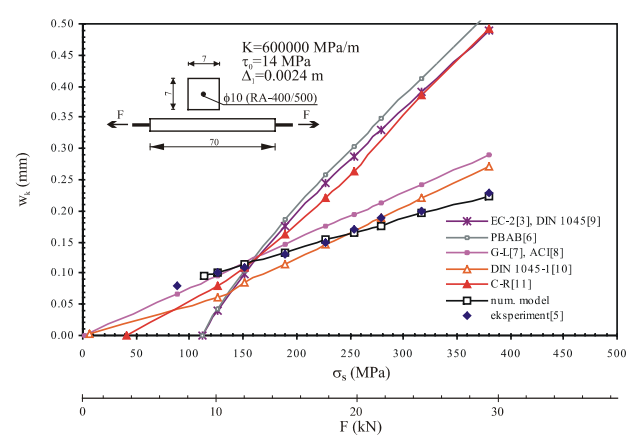
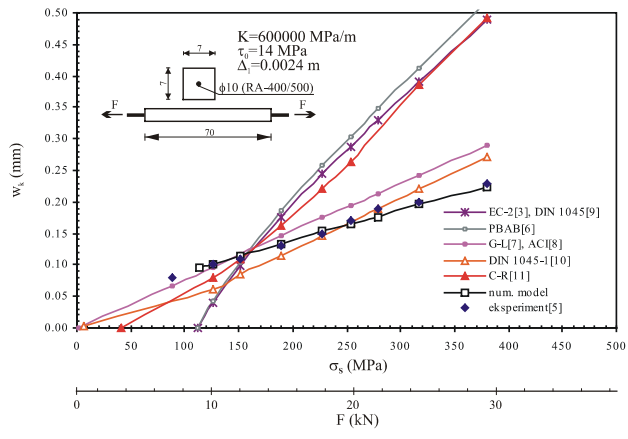
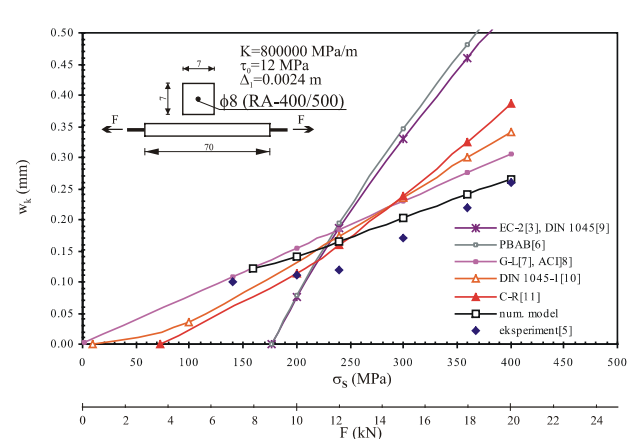
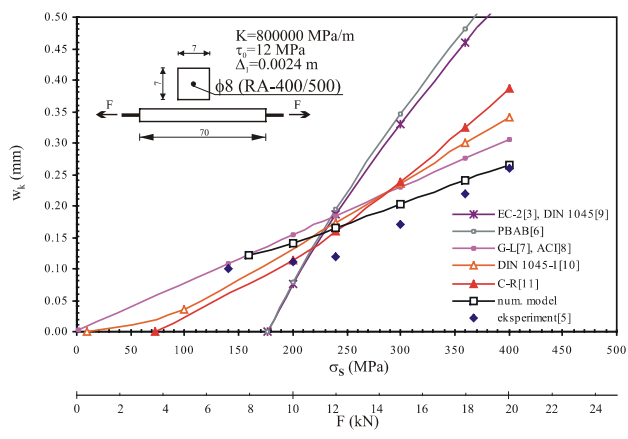
Izloženi numerički model i odgovarajući razvijeni proračunski program CW za proračun širina i razmaka pukotina općih betonskih elemenata testirani su na rezultatima eksperimentalno utvrđenih širina pukotina klasično armiranih betonskih gredica opterećenih na savijanje, te na rezultatima najčešće rabljenih inženjerskih postupaka proračuna širina pukotina koji su prethodno objavljeni u radu [5]. Naime, u dijagrame opterećenje-širina pukotina iz tog rada (gdje su ucrtane eksperimentalno utvrđene vrijednosti širina pukotina, te računске vrijednosti širina pukotina prema EUROCODE 2 [3], PBAB [6], Gergely-Lutz [7], ACI part 3-1999. [8], DIN 1045 [9], DIN 1045-1 [10] i Creazza-Russo [11]), ucrtane su i vrijednosti širina pukotina dobivenih ovdje izloženim numeričkim modelom. Na slikama 9. do 12. prikazani su rezultati odvojeno za čisto savijanje i odvojeno za centrični vlak, odnosno zasebno za rebrastu armaturu i zasebno za glatku.

Proračun naprezanja u betonu i armaturi izvršen je uporabom σ - ε dijagrama betona prema slikama 4., 5. i 6. (uz $E_{c,nom} = 30000$ MPa, $\varepsilon_{cu} = 0,0035$, $f_{cc} = 20,5$ MPa, te $f_{ct} = 2,8$ MPa za gređice opterećene savijanjem i $f_{ct} = 1,8$ MPa za elemente opterećene čistim vlakom). Dijagram armature σ - ε preuzet je iz EUROCODE-2 [3] (uz $E_s = 210000$ MPa). Širine pukotina proračunane su Modelom C, s vrijednostima parametara K , τ_0 i Δ_1 prikazanim na slikama.



Slika 9. Širine pukotina savijanih gredica armiranih rebrastom armaturom (RA-400/500)

Slika 10. Širine pukotina savijanih gredica armiranih glatkom armaturom (GA-500/560)

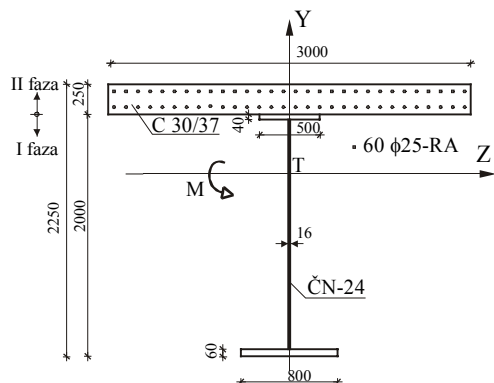


Slika 11. Širine pukotina vlačnih elemenata armiranih rebrastom armaturom (RA-400/500)

Slika 12. Širine pukotina vlačnih elemenata armiranih glatkom armaturom (GA-500/560)

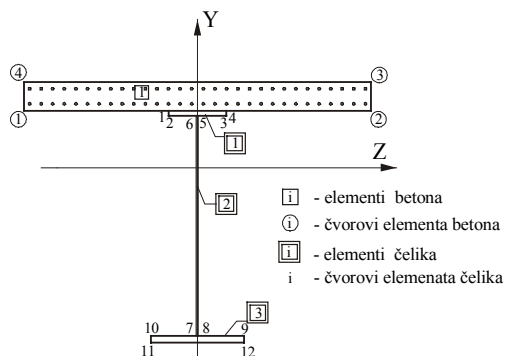
8.2 Primjer 2.

Za ilustraciju primjene izloženoga numeričkog modela pri složenim problemima, analizirana je širina pukotina spregnutog nosača mosta iznad stupa. U prvoj je fazi čelični I nosač (ČN-24) opterećen uporabnim momentom savijanja od stalnog opterećenja $M_{g1} = 3,4$ MNm (vlastita težina i težina kolničke ploče). U drugoj fazi, nakon očvršćivanja betona kolničke ploče (beton C 30/37, armatura 60 $\phi 25$ - RA 400/500), spregnuti je nosač opterećen momentom savijanja od dopunškoga stalnog opterećenja $M_{g2} = 7,7$ MNm i momentom savijanja od prometnog opterećenja $M_p = 10,0$ MNm. Geometrija presjeka, podaci o armaturi, svojstva materijala, rezne sile i ostali podaci vide na slici 13. Potrebno je provjeriti stanje raspucanosti betona za zadana uporabna opterećenja.



Slika 13. Podaci za primjer 2

Diskretizacija poprečnog presjeka konačnim elementima [2] prikazana je na slici 14.

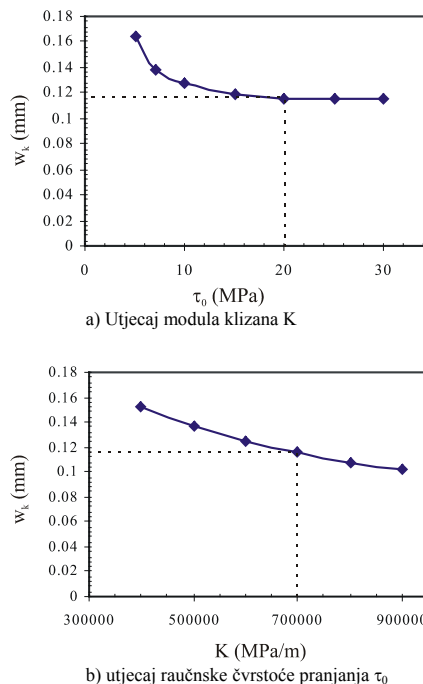


Slika 14. Diskretizacija presjeka

Dijagrami σ - ϵ za beton i betonski čelik uzeti su prema EC-2 [3]. Dijagram σ - ϵ za čelične lamele uzet je kao za betonski čelik. Usvojeni parametri armature ($\phi 25$ RA 400/500) za proračun širina pukotina su: $K = 70000$ MPa/m,

$\tau_0 = 20$ MPa i $\Delta_1 = 0,0024$ m. Proračunata srednja širina pukotina za zadano opterećenje iznosi $w_m = 0,068$ mm. Karakteristična širina pukotina u betonu je $w_k = 1.7 w_m = 0,116$ mm.

Budući da odabir τ_p - Δ dijagrama za armaturu značajno utječe na veličinu širina pukotina, analiziran je utjecaj parametara K i τ_0 na dobivene rezultate. Utjecaj modula klizanja K prikazan je na slici 15.a, a utjecaj računске čvrstoće pranja τ_0 na slici 15.b.



Slika 15. Utjecaj odabranih parametara τ_p - Δ dijagrama na širine pukotina

9 Zaključak

Izloženi model proračuna širina pukotina, s pripadajućim proračunskim programom CW, može biti od značajne koristi pri proračunu širina i razmaka pukotina u betonu složenih klasično armiranih, prednapetih i spregnutih betonskih presjeka kod kojih su klasični inženjerski postupci proračuna praktično neupotrebljivi.

Potrebna su daljnja testiranja modela na rezultatima poznatih eksperimentalnih testova širina pukotina.

Za realne praktične potrebe, posebnu pažnju treba posvetiti odabiru parametara τ_p - Δ dijagrama.

Potrebna su daljnja eksperimentalna ispitivanja radi određivanja τ_p - Δ dijagrama za različite armature, različite promjere armaturnih šipki i različite kakvoće betona.

LITERATURA

- [1] Markota, L.: *Numerički model proračuna širina pukotina betonskih elemenata*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split 2002.
- [2] Radnić, J.; Harapin, A.: *Model dimenzioniranja kompozitnih presjeka*, Građevinar, Vol. 45, br. 7, str. 379-389, 1993.
- [3] EUROCODE 2: *Design of Concrete Structures*; Part 1: General Rules and Rules for Buildings, Revised final draft, Brussels, 1990.
- [4] Sorić, Z.; Morić, D.: *Teorijska analiza lokalnih napona prijanjanja*, Građevinar, Vol. 41, br. 8, str. 377-383, 1989.
- [5] Radnić, J.; Markota, L.: *Ekperimentalna provjera inženjerskih postupaka proračuna širina pukotina betonskih elemenata*, Engineering modelling (u tisku).
- [6] Priručnik za primjenu pravilnika o tehničkim normativima za beton i armirani beton - BAB 87, Građevinska knjiga, Beograd, 1991.
- [7] Tomičić, I.: *Betonske konstrukcije*, drugo izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
- [8] *ACI manual of concrete practice - part 3*, American Concrete Institute, 1999.
- [9] DIN 1045, Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung, 1988.
- [10] DIN 1045-1 (Entwurf); Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton; Teil1: Bemessung und Konstruktion, 1998.
- [11] Creazza, G.; Russo, S.: *A New Model for Predicting Crack Width With Different Percentages of Reinforcement and Concrete Strength Classes*, Materials & Structures, Vol. 32, No. 221, pp. 520-524, 1999.
- [12] Van der Veen, C.: *Theoretical and Experimental Determination of Crack Width in Reinforced Concrete at Very Low Temperatures*, Heron, Vol. 35, No. 2, 1990.
- [13] Pekau, OA.; Zhang, ZX.: *Strain - Space Cracking Model for Concrete and its Application*, Computers & Structures, Vol. 51, No. 2, pp. 617-630, 1994.
- [14] Nemati, KM.; Monteiro, PJM.; Scrivener, KL.: *Analysis of Compressive Stress - Induced Cracks in Concrete*, ACI Materials Journal, Vol. 95, No. 5, pp. 617-630, 1998.