

Primljen / Received: 6.7.2021.

Ispravljen / Corrected: 20.9.2021.

Prihvaćen / Accepted: 30.11.2021.

Dostupno online / Available online: 10.1.2022.

# Dinamička analiza posmičnih stijena s čeličnom ispunom

## Autori:



**Yasin Gungor**, dipl.ing.građ.

Sveučilište Canakkale Onsekiz Mart, Turska  
Tehnički fakultet

Odjel za građevinarstvo  
[ysngungor@outlook.com](mailto:ysngungor@outlook.com)



Prof.dr.sc. **Kanat Burak Bozdogan**, dipl.ing.građ.

Sveučilište Canakkale Onsekiz Mart, Turska  
Tehnički fakultet

Odjel za građevinarstvo  
[kbbozdogan@comu.edu.tr](mailto:kbbozdogan@comu.edu.tr)

Autor za korespondenciju

Prethodno priopćenje

**Yasin Gungor, Kanat Burak Bozdogan**

## Dinamička analiza posmičnih stijena s čeličnom ispunom

U ovom se radu prikazuje model Timošenkove grede (model za kontinuirane sustave) koji je na originalan način prilagođen za provedbu dinamičke analize sustava posmičnih stijena s čeličnom ispunom (SPSW). Dinamičke karakteristike za prva tri oblika izračunane su rješavanjem diferencijalne jednačbe modela ekvivalentne Timošenkove grede primjenom metode diferencijalne transformacije. Dinamičke karakteristike prikazane su tablično kako bi se omogućilo brzo i praktično izračunavanje. Pomoću dinamičkih karakteristika provedena je analiza spektra odziva takvih građevina. Primjenom pristupa razvijenog u ovom istraživanju mogu se izračunati ne samo osnovni periodi već i posmična sila na razini tla, maksimalni katni pomak i maksimalni relativni katni pomak. Metoda diferencijalne transformacije u ovoj se radu koristi za rješavanja diferencijalne jednačbe iskazane prema proračunskom modelu za kontinuirane sustave. Kako bi se ispitala pogodnost metode prezentirane u radu, riješen je primjer iz literature, te je provedeno ocjenjivanje dobivenih rezultata. Rezultati pokazuju da se prikazana metoda može koristiti u preliminarnom koraku projektiranja građevina.

### Ključne riječi:

posmična stijena s čeličnom ispunom, model kontinuuma, Timošenkova greda, metoda diferencijalne transformacije, dinamičke karakteristike

Research Paper

**Yasin Gungor, Kanat Burak Bozdogan**

## An approach for dynamic analysis of steel plate shear wall systems

In this paper, the Timoshenko beam model (continuous system model) is originally adapted for dynamic analysis of steel plate shear wall (SPSW) systems. Dynamic characteristics for the first three modes are found by solving differential equation of the equivalent Timoshenko beam model using the differential transformation method. Dynamic characteristics are tabulated for quick and practical calculation. With the help of the dynamic characteristics, the response spectrum analysis of such buildings is performed. Using the approach developed in this study, it is possible to calculate not only natural periods, but also the base shear force, maximum storey displacement, and maximum storey drift ratio. The differential transformation method is used in this study for solving the differential equation written according to the continuous system calculation model. To investigate the suitability of the method presented in the study, an example taken from the literature is solved and the results are evaluated. The results show that the method presented can be used in the preliminary design stage.

### Key words:

steel plate shear wall, continuum model, Timoshenko beam, differential transform method, dynamic characteristics

## 1. Uvod

Kako bi se spriječilo oštećivanje građevina zbog seizmičkih opterećenja, katni pomaci i relativni međukatni pomaci trebaju se zadržati unutar odgovarajućih graničnih vrijednosti. Jedan od sustava koji se koriste za ograničavanje katnog pomaka i relativnog međukatnog pomaka u čeličnim građevinama jest sustav posmičnih stijena s čeličnom ispunom (eng. *Steel Plate Shear Wall* - SPSW).

Posljednjih su godina provedena brojna eksperimentalna i analitička ispitivanja kako bi se istražilo ponašanje čeličnih građevina u kojima se koriste takvi sustavi. Donosi se kratak prikaz takvih studija. Love i dr. [1] koristili su SPSW sustave za pojačanje okvirne čelične konstrukcije bolničke zgrade oštećene u potresu koji je 1994. godine zadesio Northridge. U tom radu, autori pokazuju da je pojačanjem pomoću SPSW sustava postignuta tražena razina sukladnosti s odgovarajućim normama.

Berman i dr. [2] istražili su uvjete u kojima dolazi do oštećenja SPSW sustava te su predložili odgovarajuće metode za njihovu sanaciju. U okviru te studije izrađena je i baza podataka za sustave u kojima se koriste.

Bhowmick i dr. [3] predložili su za SPSW sustave metodu proračuna sposobnosti nosivosti koja omogućuje bolje seizmičko ponašanje uz razumne troškove. Utvrđeno je da je metoda predložena u tom radu kompatibilna s rezultatima nelinearne analize. Clayton i dr. [4] predložili su postupak projektiranja samocentrirajućih SC-SPSW sustava koji je razvijen primjenom postupka projektiranja koji se zasniva na ponašanju konstrukcije. Istraživanje je pokazalo da se SC-SPSW sustavi dobro ponašaju na tri različite razine potresa.

Clayton i dr. [5] analizirali su ponašanje samocentrirajućih SPSW sustava za slučaj cikličnog opterećenja. Eksperimenti provedeni u okviru studije pokazuju da se SC-SPSW (eng. *Self-Centering Steel Plate Shear Wall*) sustav odlikuje visokom razinom duktilnosti i krutosti.

Alavi i Nateghi [6] su pokazali da je faktor izmjene odziva (R) dijagonalno ukrućenih SPSW sustava za otprilike 13 % veći od odgovarajućeg faktora neukrućenih sustava. Oni su uočili da primjena rubnih ukruta na pločama posebno povoljno utječe na histerezno ponašanje SPSW sustava.

Nie i dr. [7] eksperimentalno su istražili seizmičko ponašanje perforiranih i neperforiranih ukrućenih SPSW sustava. Na temelju rezultata ispitivanja, navedeni autori su predložili korištenje ukrućenih ploča za povećanje čvrstoće i krutosti perforiranih SPSW sustava.

Dowden i Bruneau [8] modelirali su samocentrirajuće SPSW sustave u naravnoj veličini te su napravili usporedbu s analitičkim rezultatima. U zaključku studije oni su utvrdili da je predložena analitička metoda kompatibilna s eksperimentalnim rezultatima. Dowden i dr. [9] istražili su samocentrirajući SPSW sustav u naravnoj veličini kako bi utvrdili način na koji bi se mogla smanjiti oštećenja na SPSW sustavima. Rezultati ostvareni tijekom tih eksperimenata pokazuju zadovoljavajuću učinkovitost samocentrirajućih SPSW sustava.

Yu i dr. [10] istražili su cikličko ponašanje SPSW sustava križno ukrućenih pomoću poprečnih ukruta. Rezultati tih eksperimenata pokazuju da je cikličko ponašanje predloženog sustava bolje nego kod klasičnog sustava.

Wang i Xie [11] koriste betonom ispunjen čelični kružni stup (eng. *concrete-filled steel tubular* - CFST) i poprečno ojačanje SC-SPSW kako bi spriječili izvijanje na dnu čeličnog stupa izvedenog od H-profila i izbjegli suženje u histereznim krivuljama, jer su to dva osnovna problema koji se javljaju kod tankih SC-SPSW sustava. Na temelju eksperimentalnih i analitičkih rezultata utvrđeno je da se primjenom predloženog sustava povećava sila pri kojoj dolazi do popuštanja kao i maksimalna nosivost.

Barua i Bhowmick [12] istražili su nelinearno seizmičko ponašanje perforiranih SPSW sustava projektiranih u skladu sa seizmičkim propisima. Utvrđena je zadovoljavajuća duktilnost i čvrstoća sustava posmičnih stijena s perforiranim čeličnim ispunama.

Čurković i dr. [13] istražili su eksperimentalnim postupkom i numeričkom metodom ponašanje SPSW sustava, a koristili su stupove s raznim vrijednostima krutosti na savijanje. U zaključku je naglašeno da je minimalna krutost na savijanje stupova prema normi AISC 341-10 možda isuviše konzervativna.

Bai i dr. [14] predložili su pojednostavljenu metodu za seizmičko projektiranje građevina. Ta metoda omogućuje poboljšano ponašanje niskih SPSW građevina s dvostrukim okvirom. U radu su niske SPSW građevine s dvostrukim okvirom reducirane na ekvivalentni sustav s jednim stupnjem slobode. U zaključku se navodi da predloženi model s jednim stupnjem slobode na prikladan način predstavlja ponašanje analiziranog sustava.

Azarafrooz i Shekastehband [15] analizirali su ponašanje četverokatnog i osmokatnog SPSW sustava s pločom ispune spojenom s okvirom na tri različita načina. Utvrđeno je da dodavanje sekundarnih stupova dovodi do znatnog povećanja posmične čvrstoće sustava.

Fathy [16] je analizirao ponašanje okvirnih građevina sa SPSW sustavom i to s potpornim nosačima i bez njih. U radu su provedene nelinearne analize pomoću metode konačnih elemenata. Konačno je utvrđeno da se sustav s dva potporna nosača ponaša bolje od sustava sa samo jednim potpornim nosačem. Također je naglašeno da se bočni pomaci smanjuju usporedo s povećanjem broja potpornih nosača.

Liu He i Li [17] eksperimentalno su istražili histerezno ponašanje SPSW sustava sa samocentrirajućim poduporama za trošenje energije. U zaključku studije utvrđeno je da bi tlačna čvrstoća ispune posmične stijene trebala biti manja od horizontalne sile u poduporama za vrijeme mirovanja, jer bi se na taj način povećao samocentrirajući učinak sustava.

Jiang i dr. [18] predložili su izraz za izračunavanje osnovnih perioda SPSW sustava. Tijekom razrade predloženog izraza usvojeno je da čelični okviri pokazuju samo posmično deformiranje, dok posmične stijene s ispunom pokazuju deformacije uslijed posmika i savijanja. U završnom dijelu studije prikazani su i primjeri kojima je dokazana prikladnost analitičke metode prikazane u ovom radu.

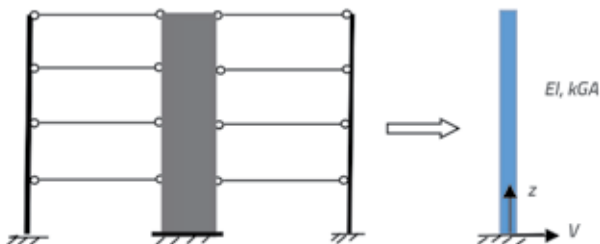
Zhao i dr. [19] analizirali su prikladnost primjene empirijskog izraza za određivanje perioda za sustave posmičnih stijena s ispunom od valovitog čeličnog lima te su predložili izraz za izračunavanje perioda takvih sustava uz korištenje modela posmično-savojne grede. U zaključku studije utvrđeno je da se predviđenom analitičkom metodom postižu rezultati bliski onima koji se dobivaju primjenom metode konačnih elemenata. Za razliku od analiza opisanih u literaturi, u ovom se radu koristi model ekvivalentne kontinuirane Timošenkovke grede u svrhu dinamičke analize sustava posmičnih stijena s čeličnom ispunom. Pritom se metoda diferencijalne transformacije koristi za rješavanje diferencijalne jednadžbe koja predstavlja dinamičko ponašanje ekvivalentne kontinuirane Timošenkovke grede. U izradi predložene metode usvojene su sljedeće pretpostavke:

- materijal se ponaša linearno elastično,
- pomaci su dovoljno mali da se geometrijski nelinearni učinci mogu zanemariti,
- usvojeno je da su svojstva konstrukcije ista po čitavoj visini građevine,
- torzijski efekti oko vertikalne osi građevine mogu se zanemariti.

U ovom je radu razvijen pristup baziran na modelu za izračunavanje kontinuiranih sustava kako bi se odredile dinamičke karakteristike čeličnih građevina koje koriste SPSW sustave. U literaturi se model za proračunavanje kontinuiranih sustava koristi za analizu slobodnog vibriranja takvih sustava. Uz proračun prirodnih perioda, pristup razvijen u ovom radu omogućuje i proračun posmične sile na razini tla, maksimalnog katnog pomaka te maksimalnog relativnog međukatnog pomaka.

## 2. Matematički model SPSW sustava

Proračunski model za kontinuirane sustave, temeljen na idealizaciji građevina kao konzolnih greda, jedna je od metoda koje se koriste u statičkoj i dinamičkoj analizi konstrukcija. Ovisno o sustavu nosive konstrukcije i o veličini osnih pomaka, u proračunskom modelu za kontinuirane sustave konstrukcije se mogu idealizirati kao ekvivalentna savojno-posmična greda, posmična greda, Timošenkova greda, savojna greda i sendvičasta greda.



Slika 1. Konstrukcija posmične stijene s čeličnom ispunom idealizirana kao Timošenkova greda

U literaturi su provedena istraživanja u kojima se građevine modeliraju kao ekvivalentne Timošenkovke grede [20-30]. U tim se studijama zaključuje da je model Timošenkovke grede pogodan za analizu i identifikaciju pravilnih građevina. U ovom se radu tipičan SPSW sustav modelira kao ekvivalentna Timošenkova greda (slika 1.).

Prema radovima iz literature [21-23], sustav diferencijalne jednadžbe prema Timošenkovom modelu prikazanom na slici 1. može se iskazati kao:

$$(EI) \frac{\partial^4 V_b}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$(kGA) \frac{\partial^2 V_s}{\partial z^2} - \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

gdje je  $V_b$  bočni pomak uzrokovan savijanjem,  $V_s$  je bočni pomak uzrokovan posmikom,  $V$  je ukupan bočni pomak,  $z$  je vertikalna os do visine,  $(EI)$  je krutost na savijanje Timošenkovke grede,  $\rho$  je zapreminska težina,  $A$  je površina poprečnog presjeka, dok je  $(kGA)$  ekvivalentna posmična krutost.

Ukupni bočni pomak je suma bočnog pomaka koji nastaje uslijed savijanja i posmika, a izračunava se pomoću sljedećeg odnosa:

$$V = V_b + V_s \quad (3)$$

Posmična sila u Timošenkovoj gredi izračunava se pomoću sljedeće jednadžbe:

$$(EI) \frac{\partial^3 V_b}{\partial z^3} = -(kGA) \frac{\partial V_s}{\partial z} \quad (4)$$

Izraz (5), uz pretpostavku harmonijske vibracije, može se iskazati kao:

$$V(z, t) = y(z) \cdot e^{i\omega t} \quad V_b(z, t) = y_b(z) \cdot e^{i\omega t} \quad V_s(z, t) = y_s(z) \cdot e^{i\omega t} \quad (5)$$

gdje je  $\omega$  kutna frekvencija.

Ako se izraz (5) primijeni na parcijalnim diferencijalnim jednadžbama (1), (2) i (4), dobivaju se obične diferencijalne jednadžbe (6), (7) i (8):

$$(EI) \frac{d^4 y_b}{dz^4} - \rho A \omega^2 y = 0 \quad (6)$$

$$(kGA) \frac{d^2 y_s}{dz^2} + \rho A \omega^2 y = 0 \quad (7)$$

$$(EI) \frac{d^3 y_b}{dz^3} = -(kGA) \frac{dy_s}{dz} \quad (8)$$

Izraz (9) može se izvesti iz izraza (5).

$$y = y_b + y_s \quad (9)$$

Ako se izraz (9) uvrsti u diferencijalnu jednačbu (6), dobiva se diferencijalna jednačba (10)

$$(EI) \left[ \frac{d^4 y}{dz^4} - \frac{d^4 y_s}{dz^4} \right] - \rho A \omega^2 y = 0 \quad (10)$$

Ako se diferencijalna jednačba (7) dva puta derivira po  $z$ , dobiva se jednačba (11):

$$(kGA) \frac{d^4 y_s}{dz^4} + \rho A \omega^2 \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad (11)$$

Primjenom jednačbe (11), dobiva se jednačba (12):

$$\frac{d^4 y_s}{dz^4} = - \frac{\rho A \omega^2}{(kGA)} \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (12)$$

Ako se jednačba (12) unese u jednačbu (10), dobiva se jednačba (13):

$$(EI) \left[ \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{\rho A \omega^2}{(kGA)} \frac{d^2 y}{dz^2} \right] - \rho A \omega^2 y = 0 \quad (13)$$

Ako se obje strane diferencijalne jednačbe (13) podijele s  $(EI)$ , dobiva se jednačba (14):

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{\rho A \omega^2}{(kGA)} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{\rho A \omega^2}{(EI)} y = 0 \quad (14)$$

Rubni uvjeti linearne diferencijalne jednačbe (14) su:

- iznosi pomaka i rotacije zbog savijanja na dnu jednaki su nuli
- vrijednosti momenta savijanja i posmične sile na vrhu građevine jednake su nuli. Ti se izrazi matematički prikazuju u nastavku.

$$y(0) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dy_b}{dz} = 0 \quad (16)$$

$$\text{za } z = H \quad (EI) \frac{d^2 y_b}{dz^2} = 0 \quad (17)$$

$$\text{za } z = H \quad (EI) \frac{d^3 y_b}{dz^3} = 0 \quad (18)$$

Ako se u jednačbama (16), (17) i (18) naprave potrebne korekcije, dobivaju se jednačbe (19), (20) i (21).

$$\text{za } z = 0 \quad \frac{dy}{dz} + \frac{(EI)}{(kGA)} \left[ \frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{\rho A \omega^2}{(kGA)} \frac{dy}{dz} \right] = 0 \quad (19)$$

$$\text{za } z = H \quad (EI) \left[ \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{\rho A \omega^2 y}{(kGA)} \right] = 0 \quad (20)$$

$$\text{za } z = H \quad (EI) \left[ \frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{\rho A \omega^2}{(kGA)} \frac{dy}{dz} \right] = 0 \quad (21)$$

Sljedeća se transformacija može napraviti kako bi dotične jednačbe postale bezdimenzijske:

$$\varepsilon = \frac{z}{H} \quad (22)$$

Ako se ta transformacija primijeni na jednačbu (14), dobiva se jednačba (23):

$$\frac{1}{H^4} \frac{d^4 y}{d\varepsilon^4} + \frac{1}{H^2} \frac{\rho A \omega^2}{(kGA)} \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} - \frac{\rho A \omega^2}{(EI)} y = 0 \quad (23)$$

Ako se obje strane diferencijalne jednačbe (23) pomnože s  $H^4$ , dobiva se diferencijalna jednačba (24):

$$\frac{d^4 y}{d\varepsilon^4} + H^2 \frac{\rho A \omega^2}{(kGA)} \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} - \frac{\rho A \omega^2 H^4}{(EI)} y = 0 \quad (24)$$

Ako se potrebne korekcije naprave u jednačbi (24), tada se diferencijalna jednačba (25) može iskazati kako slijedi:

$$\frac{d^4 y}{d\varepsilon^4} + \frac{(EI)}{(kGA)H^2} \frac{\rho A \omega^2 H^4}{(EI)} \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} - \frac{\rho A \omega^2 H^4}{(EI)} y = 0 \quad (25)$$

Ako se bezdimenzijski parametri dodijele koeficijentima diferencijalne jednačbe (25), tada se diferencijalna jednačba (26) iskazuje kako slijedi:

$$\frac{d^4 y}{d\varepsilon^4} + r^2 a \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} - a y = 0 \quad (26)$$

Vrijednosti  $r^2$  i  $a$  su bezdimenzijski parametri u diferencijalnoj jednačbi (26), a definirani su sljedećim jednačbama (27) i (28):

$$r^2 = \frac{(EI)}{(kGA)H^2} \quad (27)$$

$$a = \frac{\rho A \omega^2 H^4}{(EI)} \quad (28)$$

Na isti se način rubni uvjet (15) može izraziti bezdimenzijski s jednadžbom (29):

$$y(0) = 0 \quad (29)$$

Rubni uvjet iz (19) može se iskazati bezdimenzijski kao u jednadžbi (30).

$$Za \varepsilon = 0 \left[ 1 + \frac{(EI)^2}{H^4 (kGA)^2} \frac{\rho A \omega^2 H^4}{(EI)} \frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{(EI)}{(kGA)H^2} \frac{d^3 y}{d\varepsilon^3} \right] = 0 \quad (30)$$

Ako se jednadžbe (27) i (28) uvrste u jednadžbu (30), dobiva se jednadžba (31):

$$Za \varepsilon = 0 \left[ 1 + r^4 a \right] \frac{dy}{d\varepsilon} + r^2 \frac{d^3 y}{d\varepsilon^3} = 0 \quad (31)$$

Rubni uvjeti iz (20) može se dimenzionalno iskazati na sljedeći način:

$$Za \varepsilon = 1 \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} + \frac{\rho A \omega^2}{(EI)} H^4 \frac{(EI)}{(kGA)H^2} y = 0 \quad (32)$$

Ako se jednadžbe (27) i (28) uvrste u jednadžbu (32), dobiva se jednadžba (33):

$$Za \varepsilon = 1 \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} + r^2 a y = 0 \quad (33)$$

Ako se jednadžba (22) primijeni na jednadžbu (21), dobiva se jednadžba (34):

$$Za \varepsilon = 1 \frac{d^3 y}{d\varepsilon^3} + \frac{\rho A \omega^2}{(EI)} H^4 \frac{(EI)}{(kGA)H^2} \frac{dy}{d\varepsilon} = 0 \quad (34)$$

Ako se jednadžbe (27) i (28) uvrste u (34), dobiva se jednadžba (35):

$$Za \varepsilon = 1 \frac{d^3 y}{d\varepsilon^3} + r^2 a \frac{dy}{d\varepsilon} = 0 \quad (35)$$

Funkcija  $y$  prema metodi diferencijalne transformacije definirana je kako slijedi [31]:

$$y(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left[ \frac{d^k y}{d\varepsilon^k} \right]_{\varepsilon=0} \quad (36)$$

Jednadžba (36) može se iskazati na sljedeći način [31].

$$y(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Y[k] \quad (37)$$

Ovdje se vrijednost  $Y[k]$  može iskazati na sljedeći način [31]:

$$Y[k] = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y}{d\varepsilon^k} \right]_{\varepsilon=0}; 0 \leq \varepsilon < 10 \quad (38)$$

Prema gornjim jednadžbama, funkcija transformacije iskazuje se prema jednadžbi (39) [31].

$$DT(\varepsilon^\alpha y^\beta) = \left[ \prod_{i=1}^{\beta} (k - \alpha + i) \right] Y(k - \alpha + \beta) \quad (39)$$

Ovdje se  $y$  definira kako slijedi:

$$y^\beta = \frac{d^\beta y}{d\varepsilon^\beta} \quad (40)$$

Ako se transformacija iz (39) primijeni na jednadžbu (26), dobiva se jednadžba (41):

$$Y[k+4] = \frac{-r^2 a Y[k+2]}{(k+4)(k+3)} + \frac{a Y[k]}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \quad (41)$$

Isto tako, ako se metoda diferencijalne transformacije primijeni na jednadžbe (29), (31), (33) i (35), dobivaju se jednadžbe (42), (43), (44) i (45):

$$Y[0] = 0 \quad (42)$$

$$Y[3] = \frac{-(1+r^4)Y[1]}{6r^2} \quad (43)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k)(k-1)Y[k] + r^2 a \sum_{k=0}^{\infty} Y[k] = 0 \quad (44)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k)(k-1)(k-2)Y[k] + r^2 a \sum_{k=0}^{\infty} Y[k] = 0 \quad (45)$$

Ako se sve vrijednosti  $Y$  uvrste u članove  $Y[1]$  i  $Y[2]$  pomoću jednadžbe (41), tada se jednadžbe (44) i (45) mogu izraziti u matričnom obliku kako slijedi:

$$A \begin{Bmatrix} Y[1] \\ Y[2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Matrična jednačba (46) može se iskazati kako slijedi:

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ A(2,1) & A(2,2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y[1] \\ Y[2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Vrijednosti  $\alpha$  dobivaju se netrivialnim rješavanjem matrične jednačbe (47). Ako se prirodna frekvencija unese umjesto kutne frekvencije u jednačbu (28), dobiva se jednačba (48):

$$a = \frac{4\rho A\pi^2 H^4}{T^2(EI)} \quad (48)$$

Osnovni period vibriranja određuje se pomoću jednačbe (48) kako slijedi:

$$T_i = \frac{2\pi}{a_i} H^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} = S_i H^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (49)$$

Jednačba (50) dobiva se iz jednačbe (49):

$$S_i = \frac{2\pi}{a_i} \quad (50)$$

Vrijednosti  $S_i$  iz jednačbe (50) izračunavaju se za razne vrijednosti  $r^2$ , a prikazane su na slici 2. i u tablici 1. U proračunskom modelu s koncentriranim masama usvojeno je da se mase prikupljaju na razini pojedinačnih katova, a prema proračunskom modelu za kontinuirane sustave mase se raspoređuju duž visine građevine. Zbog toga dolazi do bitnih razlika između ta dva proračunska modela, naročito kada se radi o građevinama u području niskogradnje. Korekcijski koeficijent ( $\mathcal{K}$ ), koji varira ovisno o broju katova, određuje se kako bi se proračunski model za kontinuirane sustave prilagodio proračunskom modelu s koncentriranim masama. Stoga se vrijednosti osnovnih perioda mogu izračunati kako slijedi:

$$T_i = \frac{S_i H^2}{\mathcal{K}_i} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (51)$$

Za izračun korekcijskih faktora koristi se računalni program SAP 2000. Dakle, korekcijski faktor se definira pomoću rezultata dobivenih rješavanjem konstrukcija s različitim brojevima katova, a za to se koristi proračunski model s koncentriranim masama i program SAP 2000. Korekcijski faktori za prva tri oblika prikazani su u tablici 2.

Modalni faktor sudjelovanja ( $\Gamma$ ), temeljen na dinamičkoj analizi, izračunava se pomoću sljedeće jednačbe [32]:

$$\Gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^n (m_j y_{ji})}{\sum_{j=1}^n (m_j y_{ji}^2)} \quad (52)$$

Koeficijent efektivne mase ( $em$ ) može se izračunati pomoću jednačbe (53) [32].

$$em_i = \frac{1}{M_t} \frac{\left[ \sum_{j=1}^n (m_j y_{ji}) \right]^2}{\sum_{j=1}^n (m_j y_{ji}^2)} \quad (53)$$

gdje  $M_t$  predstavlja ukupnu masu građevine.

Koeficijenti efektivne mase  $em$  prikazani su za prva tri oblika na slici 3. i u tablici 1. Posmična sila na razini tla izračunava se za oblik i. prema sljedećoj jednačbi [32]:

$$V_{bi} = em_i \cdot M_t \cdot S_{ai} \quad (54)$$

Pomak u vršnoj točki može se izračunati pomoću sljedeće jednačbe [32]:

$$d_{max,i} = \Gamma_i \gamma_i(1) S_{ai} = dep_i S_{di} \quad (55)$$

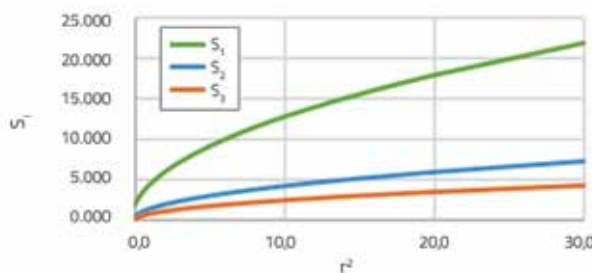
gdje vrijednosti  $S_{ai}$  i  $S_{di}$  označavaju spektralno ubrzanje i spektralni pomak a izračunavaju se za i-ti oblik.

Vrijednosti  $dep$  za razne vrijednosti  $r^2$  izračunane su i prikazane za prva tri oblika na slici 4. i u tablici 1.

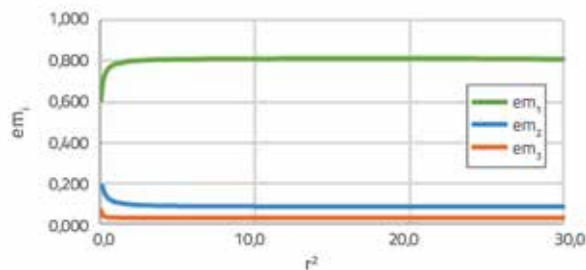
Za položaj maksimalnog relativnog međukatnog pomaka definiranog za odgovarajući oblik, maksimalne vrijednosti relativnog međukatnog pomaka, koje odgovaraju istom mjestu u drugom obliku, mogu se izračunati prema jednačbi (56).

$$dr_{ij} = \Gamma_i \frac{1}{H} \left( \frac{dy_i(\epsilon_{jmax})}{d\epsilon} \right) S_{di} = \frac{\beta_{ij}}{H} S_{di}; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 \quad (56)$$

Za prve se oblike vrijednosti  $\beta$  izračunavaju pomoću jednačbe (56), kako je to prikazano na slici 5. i u tablici 1.



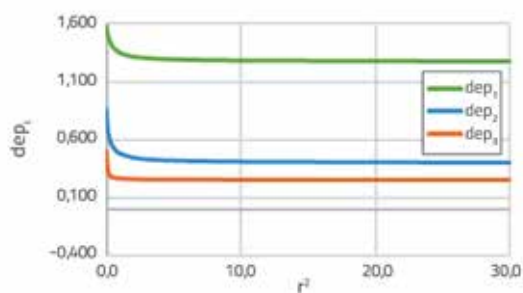
Slika 2. Vrijednosti S za prva tri oblika



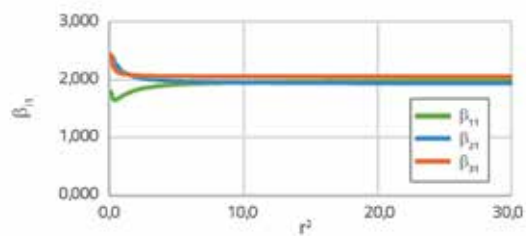
Slika 3. Vrijednosti koeficijenta efektivne mase

Tablica 1. Dinamički koeficijenti

$r^2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$em_1$	$em_2$	$em_3$	$dep_1$	$dep_2$	$dep_3$	$\beta_{11}$	$\beta_{21}$	$\beta_{31}$
0,0	1,787	0,285	0,102	0,610	0,190	0,070	1,570	0,870	0,510	-	-	-
0,1	2,171	0,575	0,284	0,687	0,187	0,049	1,500	0,690	0,337	1,792	2,330	2,440
0,2	2,504	0,740	0,383	0,722	0,162	0,043	1,460	0,630	0,310	1,686	2,380	2,268
0,3	2,801	0,866	0,460	0,743	0,145	0,040	1,430	0,590	0,290	1,654	2,345	2,202
0,4	3,070	0,971	0,526	0,756	0,134	0,039	1,410	0,560	0,290	1,651	2,230	2,168
0,5	3,319	1,064	0,584	0,765	0,127	0,038	1,390	0,540	0,280	1,660	2,257	2,147
0,6	3,550	1,148	0,637	0,772	0,121	0,038	1,380	0,530	0,280	1,674	2,222	2,132
0,7	3,768	1,226	0,686	0,777	0,117	0,037	1,370	0,510	0,280	1,689	2,194	2,122
0,8	3,974	1,298	0,731	0,781	0,113	0,037	1,360	0,500	0,280	1,704	2,170	2,113
0,9	4,170	1,367	0,774	0,785	0,111	0,037	1,350	0,500	0,270	1,719	2,149	2,106
1,0	4,357	1,431	0,814	0,787	0,108	0,037	1,343	0,489	0,274	1,733	2,132	2,102
2,0	5,913	1,961	1,142	0,801	0,097	0,036	1,311	0,454	0,268	1,827	2,043	2,080
3,0	7,138	2,372	1,395	0,805	0,093	0,035	1,299	0,440	0,266	1,872	2,009	2,072
4,0	8,183	2,722	1,608	0,808	0,091	0,035	1,292	0,433	0,265	1,899	1,991	2,068
5,0	9,108	3,031	1,796	0,809	0,090	0,035	1,288	0,429	0,265	1,916	1,980	2,066
6,0	9,947	3,312	1,966	0,810	0,089	0,035	1,285	0,426	0,264	1,928	1,972	2,064
7,0	10,721	3,570	2,123	0,811	0,089	0,035	1,283	0,424	0,264	1,937	1,967	2,063
8,0	11,443	3,811	2,268	0,811	0,088	0,035	1,282	0,422	0,264	1,944	1,962	2,062
9,0	12,122	4,038	2,405	0,812	0,088	0,035	1,280	0,421	0,263	1,949	1,959	2,061
10,0	12,765	4,252	2,535	0,812	0,088	0,035	1,279	0,420	0,263	1,954	1,957	2,060
11,0	13,377	4,456	2,658	0,812	0,087	0,035	1,279	0,419	0,263	1,957	1,954	2,060
12,0	13,962	4,652	2,776	0,813	0,087	0,035	1,278	0,418	0,263	1,960	1,953	2,060
13,0	14,524	4,839	2,889	0,813	0,087	0,035	1,277	0,418	0,263	1,963	1,951	2,059
14,0	15,065	5,019	2,998	0,813	0,087	0,035	1,277	0,417	0,263	1,965	1,950	2,059
15,0	15,587	5,194	3,103	0,813	0,087	0,035	1,277	0,417	0,263	1,967	1,948	2,058
16,0	16,092	5,362	3,204	0,813	0,087	0,035	1,276	0,416	0,263	1,969	1,947	2,058
17,0	16,581	5,525	3,302	0,813	0,086	0,035	1,276	0,416	0,263	1,970	1,947	2,058
18,0	17,057	5,684	3,398	0,813	0,086	0,035	1,276	0,416	0,263	1,972	1,946	2,058
19,0	17,520	5,838	3,491	0,814	0,086	0,035	1,275	0,415	0,263	1,973	1,945	2,058
20,0	17,971	5,988	3,581	0,814	0,086	0,035	1,275	0,415	0,263	1,974	1,945	2,058
30,0	21,977	7,324	4,385	0,810	0,086	0,035	1,270	0,410	0,260	1,980	1,940	2,060



Slika 4. Vrijednosti pomaka za prva tri oblika

Slika 5. Vrijednosti  $\beta$  za prvi oblik

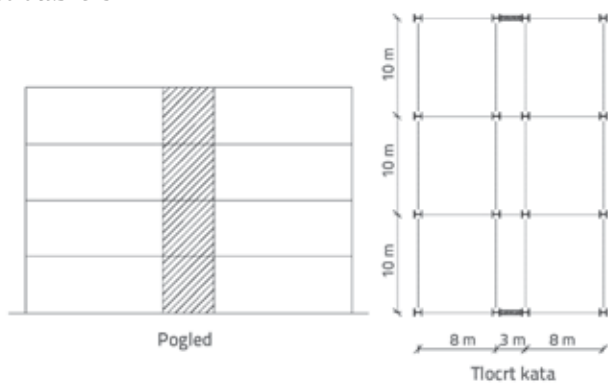


Tablica 2. Koeficijenti umanjenja

Broj katova	Prvi oblik	Drugi oblik	Treći oblik
1	0,492	-	-
2	0,664	0,704	-
3	0,749	0,781	0,751
4	0,799	0,821	0,829
5	0,833	0,848	0,860
6	0,857	0,868	0,878
7	0,875	0,883	0,892
8	0,889	0,895	0,903
9	0,900	0,905	0,912
10	0,909	0,913	0,919
11	0,917	0,920	0,925
12	0,923	0,926	0,931
13	0,928	0,931	0,935
14	0,933	0,935	0,939
15	0,937	0,939	0,943
16	0,941	0,943	0,946
17	0,944	0,946	0,949
18	0,947	0,948	0,952
19	0,950	0,951	0,954
20	0,952	0,953	0,956
21	0,954	0,955	0,958
22	0,956	0,957	0,960
23	0,958	0,959	0,962
24	0,960	0,960	0,963
25	0,961	0,962	0,965
26	0,963	0,963	0,966
27	0,964	0,964	0,967
28	0,965	0,966	0,968
29	0,967	0,967	0,969
30	0,968	0,968	0,970

### 3. Numerički primjer

Tlocrt i presjek četverkatne čelične građevine analizirane u [33] prikazani su na slici 6. Karakteristike građevina prikazane su utablici 3



Slika 6. Katni tlocrti odabrane građevine [33]

Tablica 3. Karakteristike građevine

Debljina ploče	3 mm
Širina ploče	3 m
Poprečni presjek stupova	HD 400 · 287
Broj katova	4
Visina kata	3,29 m
Ukupna visina građevine (H)	13,16 m
Masa raspoređena po visini građevine ( $\rho A$ )	45,593 t/m

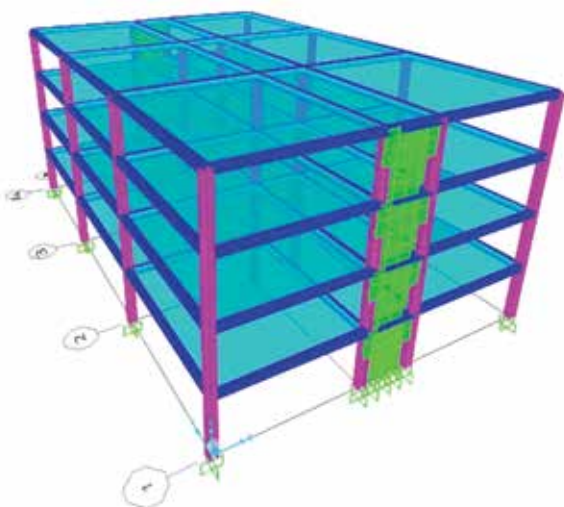
S obzirom na moment tromosti bruto presjeka sustava, osnovni periodi za prva tri oblika izračunavaju se pomoću metode prikazane u ovom radu (Timošenkov model grede). Isti primjer je modeliran pomoću programa SAP 2000 i



Tablica 4. Vrijednosti osnovnih perioda

Osnovni periodi [s]	Model Timošenkove grede	SAP2000	ETABS	ANSYS [33]
$T_1$	0,606	0,569	0,586	0,563
$T_2$	0,181	0,158	0,159	-
$T_3$	0,095	0,080	0,080	-

ETABS. SPSW sustav modeliran je pomoću plošnih elemenata primjenom programa SAP 2000 i ETABS. Model SAP2000 prikazan je na slici 7.



Slika 7. Model SAP2000 3D

Vrijednosti ( $EI$ ) i ( $kGA$ ) izračunane su pomoću bruto presjeka a dani su u literaturi [32]:

$$(EI) = 44 \cdot 10^6 \text{ [kNm}^2\text{]}$$

$$(kGA) = 0,902 \cdot 10^6 \text{ [kN]}$$

Vrijednost  $r^2$  određena pomoću jednadžbe (27) iznosi:

$$r^2 = \frac{44 \cdot 10^6}{0,902 \cdot 10^6 \cdot 13,16^2} = 0,282$$

Za  $r^2 = 0,281$  iz tablice 1., vrijednosti  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  iznose:

$$S_1 = 2,746, S_2 = 0,843 \text{ i } S_3 = 0,446$$

Sljedeće vrijednosti  $\mathcal{K}$  iskazane su u tablici 2. za četverokatnu građevinu:

$$\mathcal{K}_1 = 0,799, \mathcal{K}_2 = 0,821 \text{ i } \mathcal{K}_3 = 0,829$$

Primjenom momenta tromosti bruto presjeka, osnovni periodi za prva tri oblika određeni su pomoću jednadžbe (51) kako slijedi:

$$T_1 = \frac{2,746 \cdot 13,16^2}{0,799} \sqrt{\frac{45,593}{44 \cdot 10^6}} = 0,606 \text{ [s]}$$

$$T_2 = \frac{0,843 \cdot 13,16^2}{0,821} \sqrt{\frac{45,593}{44 \cdot 10^6}} = 0,181 \text{ [s]}$$

$$T_3 = \frac{0,446 \cdot 13,16^2}{0,829} \sqrt{\frac{45,593}{44 \cdot 10^6}} = 0,095 \text{ [s]}$$

Usporedba prirodnih perioda izračunanih pomoću momenta tromosti bruto presjeka prikazana je na slici 8. i u tablici 4.



Slika 8. Usporedba osnovnih perioda izračunanih pomoću momenta tromosti bruto presjeka

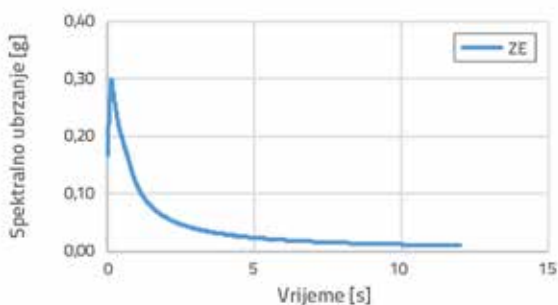
Za istu je građevinu provedena analiza spektra odziva pomoću modela Timošenkove grede prikazanog u ovom radu. Analiza je provedena u skladu s turskim seizmičkim propisima (TBEC 2018). Seizmički parametri korišteni u proračunu prikazani su u tablici 5.

Tablica 5. Seizmički parametri (pet katova)

Grad	Çanakkale (Turska)
Razina gibanja tla	DD-2
$S_s$	0,719
$S_1$	0,219
$S_{D5}$	0,970
$S_{D1}$	0,702
$T_A$ [s]	0,145
$T_B$ [s]	0,723
$T_L$ [s]	6
Klasa lokacije	ZE
Faktor umanjenja seizmičkog opterećenja	6
Faktor umanjenja čvrstoće	2,5

Tablica 6. Vrijednosti osnovnih perioda (TBEC 2018)

Osnovni periodi [s]	Model Timošenkovke grede	SAP2000	ETABS
$T_1$	0,615	0,699	0,704
$T_2$	0,184	0,202	0,202
$T_3$	0,097	0,102	0,101



Slika 9. Krivulja umanjelog elastičnog spektra odziva

U provedbi dinamičke analize prema TBEC-u koriste se efektivne krutosti poprečnog presjeka. U nastavku se daju odgovarajuće vrijednosti ( $E$ ) i ( $kGA$ ):

$$(E) = 43,12 \cdot 10^6 \text{ [kNm}^2\text{]}$$

$$(kGA) = 0,868 \cdot 10^6 \text{ [kN]}$$

Vrijednost  $r^2$  dobiva se pomoću jednadžbe (27) kako slijedi:

$$r^2 = \frac{43,12 \cdot 10^6}{0,868 \cdot 10^6 \cdot 13,16^2} = 0,287$$

Za vrijednost  $r^2 = 0,287$  iz tablice 1., vrijednosti  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  iznose:

$$S_1 = 2,762; S_2 = 0,849 \text{ i } S_3 = 0,450$$

Vrijednosti  $\mathcal{K}$  iz tablice 2. za četverokatnu građevinu iznose:

$$\mathcal{K}_1 = 0,799, \mathcal{K}_2 = 0,821 \text{ i } \mathcal{K}_3 = 0,829$$

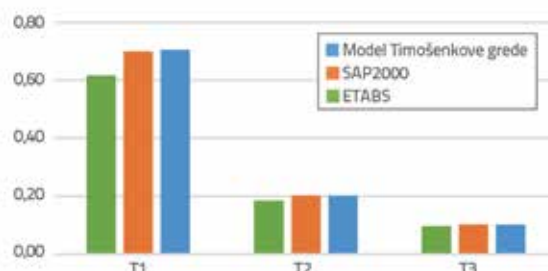
Pomoću jednadžbe (51) i efektivne krutosti poprečnog presjeka mogu se iskazati osnovni periodi za prva tri oblika:

$$T_1 = \frac{2,762 \cdot 13,16^2}{0,799} \sqrt{\frac{45,593}{43,12 \cdot 10^6}} = 0,615 \text{ [s]}$$

$$T_2 = \frac{0,849 \cdot 13,16^2}{0,821} \sqrt{\frac{45,593}{43,12 \cdot 10^6}} = 0,184 \text{ [s]}$$

$$T_3 = \frac{0,450 \cdot 13,16^2}{0,829} \sqrt{\frac{45,593}{43,12 \cdot 10^6}} = 0,097 \text{ [s]}$$

Osnovni periodi izračunani pomoću efektivne krutosti poprečnog presjeka prikazani su u tablici 6. i na slici 10.



Slika 10. Usporedba osnovnih perioda izračunanih pomoću momenta tromosti bruto poprečnog presjeka

Za vrijednost  $r^2 = 0,287$  iz tablice 1., vrijednosti  $em_1$ ,  $em_2$  i  $em_3$  iznose:

$$em_1 = 0,740, em_2 = 0,147 \text{ i } em_3 = 0,040$$

Prema slici 9., vrijednosti spektralnog ubrzanja koje odgovaraju izračunanim vrijednostima osnovnih perioda iznose:

$$Sa_1 = 1,737 \text{ [m/s}^2\text{]}, Sa_2 = 2,806 \text{ [m/s}^2\text{]} \text{ i } Sa_3 = 2,564 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Vrijednosti posmične sile na razini tla izračunavaju se za sva tri oblika pomoću jednadžbe (54) i iznose:

$$V_{b1} = 0,740 \cdot 1200 \cdot 1,737 = 1542,456 \text{ [kN]}$$

$$V_{b2} = 0,147 \cdot 1200 \cdot 2,06 = 494,978 \text{ [kN]}$$

$$V_{b3} = 0,040 \cdot 1200 \cdot 2,564 = 123,072 \text{ [kN]}$$

Proračunska posmična sila na razini tla može se izračunati prema metodi kvadratnog korijena sume kvadrata (SRSS) kako slijedi:

$$V_b = \sqrt{1542,456^2 + 494,978^2 + 123,072^2} = 1624,599 \text{ [kN]}$$

Za vrijednost  $r^2 = 0,287$  iz tablice 1., dobivaju se sljedeće vrijednosti  $dep_1$ ,  $dep_2$  i  $dep_3$ :

$$dep_1 = 1,433983; dep_2 = 0,595311 \text{ i } dep_3 = 0,292656$$

Pomoću slike 9. dobivaju se vrijednosti spektralnog pomaka koje odgovaraju izračunanim osnovnim periodima:

$$Sd_1 = 0,017 \text{ [m]}; Sd_2 = 0,0024 \text{ [m]} \text{ i } Sd_3 = 0,00061 \text{ [m]}$$

Tablica 7. Usporedba posmične sile u bazi, vršnog pomaka i maksimalnog relativnog katnog pomaka

	Model Timošenkovke grede	SAP2000	ETABS
$V_t$ [kN]	1624,599	1617,895	1607,402
$d_{max}$ [m]	0,0244	0,0264	0,0268
$dr_{max}$	0,002187	0,002322	0,002372

Vršni pomak izračunan je za svaki od tri oblika pomoću jednadžbe (55) kako slijedi:

$$d_{max1} = 1,433986 \cdot 0,017 = 0,0244 \text{ [m]}$$

$$d_{max2} = 0,595311 \cdot 0,0024 = 0,0014 \text{ [m]}$$

$$d_{max3} = 0,292656 \cdot 0,00061 = 0,00018 \text{ [m]}$$

Proračunski vršni pomak može se izračunati prema metodi kvadratnog korijena sume kvadrata (SRSS) kako slijedi:

$$d_{max} = \sqrt{0,0244^2 + 0,0014^2 + 0,00018^2} = 0,0244 \text{ [m]}$$

Za vrijednost  $r^2 = 0,287$  iz tablice 1. dobivaju se sljedeće vrijednosti  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{21}$  i  $\beta_{31}$ :

$$\beta_{11} = 1,6582489, \beta_{21} = 2,3496473 \text{ i } \beta_{31} = 2,2107634$$

Maksimalni relativni katni pomak izračunan je za svaki od tri oblika pomoću jednadžbe (56) kako slijedi:

$$dr_{11} = \frac{1,6582489}{13,16} \cdot 0,017 = 2,142 \cdot 10^{-3}$$

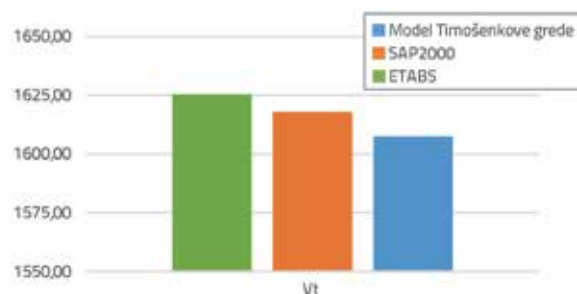
$$dr_{21} = \frac{2,3496473}{13,16} \cdot 0,0024 = 4,285 \cdot 10^{-4}$$

$$dr_{31} = \frac{2,2107634}{13,16} \cdot 0,00061 = 1,025 \cdot 10^{-4}$$

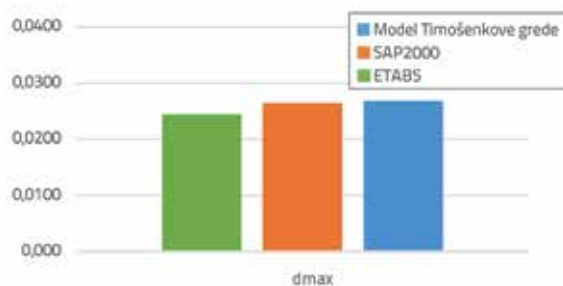
Proračunski maksimalni relativni katni pomak može se izračunati prema metodi kvadratnog korijena sume kvadrata (SRSS) kako slijedi:

$$dr_{max} = \sqrt{(2,142 \cdot 10^{-3})^2 + (4,285 \cdot 10^{-4})^2 + (1,025 \cdot 10^{-4})^2} = 0,002187$$

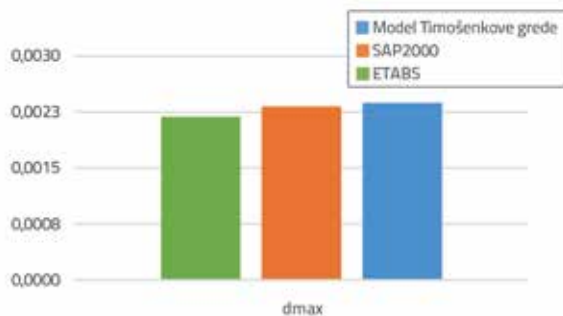
Posmična sila na razini tla, vršni pomak i maksimalni relativni katni pomak izračunani su pomoću metode prikazane u ovom radu (model Timošenkovke grede) te su uspoređeni s rezultatima SAP2000 i ETABS u tablici 8. i na slikama 11., 12. i 13.



Slika 11. Usporedba posmičnih sila na razini tla



Slika 12. Usporedba maksimalnih pomaka



Slika 13. Usporedba maksimalnih relativnih katnih pomaka

#### 4. Zaključak

U ovom je radu prikazan prijedlog proračunskog modela kontinuiranih sustava za primjenu u spektralnoj analizi građevina sa SPSW sustavom. Sustav SPSW idealizira se kao ekvivalentna Timošenkova greda. Matematički model ekvivalentne Timošenkove grede riješen je metodom diferencijalne transformacije i postignut je odgovarajući rezultat. Metoda prikazana u ovom radu prikladna je za pravilne građevine i ne može se primijeniti na nepravilne

građevine. Prikazani pristup omogućuje brzo i praktično definiranje vrijednosti osnovnih perioda, posmične sile na razini tla, vršnog pomaka i maksimalnog relativnog katnog pomaka. U završnom dijelu rada, na odgovarajućem uzorku je dokazano da se prikazanim pristupom mogu dobiti rezultati dovoljno bliski metodi konačnih elemenata. Ta metoda omogućuje definiranje podataka o dinamičkom ponašanju građevina na temelju malog broja parametara. Prikazana se metoda može koristiti u preliminarnoj fazi projektiranja.

#### LITERATURA

- [1] Love, R.J., Yu, K., McNeill, S., Zepeda, D.: Retrofit of a Critical Care Facility in Los Angeles with Steel Plate Shear Walls, Structures Congress 2008, Vancouver, Canada, April 2008, [https://doi.org/10.1061/41016\(314\)103](https://doi.org/10.1061/41016(314)103).
- [2] Berman, J.W., Lowes, L.N., Baldvins, N.M., Low, N.A.: Performance-Based Design Tools for Steel Plate Shear Walls, Structures Congress 2010, Orlando, Florida, United States, May 2010, [https://doi.org/10.1061/41130\(369\)311](https://doi.org/10.1061/41130(369)311).
- [3] Bhowmick, A.K., Driver, R.G., Grondin, G.Y.: Application of indirect capacity design principles for seismic design of steel-plate shear walls, *Struct. Eng.*, 137 (2011) 4, pp. 521-530, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000303](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000303).
- [4] Clayton, P.M., Dowden, D.M., Purba, R., Berman, J.W., Lowes, L.N., Bruneau, M.: Seismic Design and Analysis of Self-Centring Steel Plate Shear Walls, Structures Congress 2011, Las Vegas, Nevada, United States, April 2011, [https://doi.org/10.1061/41171\(401\)66](https://doi.org/10.1061/41171(401)66).
- [5] Clayton, P.M., Winkley, T.B., Berman, J.W., Lowes, L.N.: Experimental investigation of self-centring steel plate shear walls, *Struct. Eng.*, 138 (2012) 7, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000531](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000531).
- [6] Alavi, E., Nateghi, F.: Experimental study of diagonally stiffened steel plate shear walls, *Struct. Eng.*, 139 (2013) 11, pp. 1795-1811, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000750](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000750).
- [7] Nie, J.G., Zhu, L., Fan, J.S., Mo, Y.L.: Lateral resistance capacity of stiffened steel plate shear walls, *Thin-Walled Struct.*, 67 (2013), pp. 155-167, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2013.01.014>.
- [8] Dowden, D.M., Bruneau, M.: Dynamic shake-table testing and analytical investigation of self-centring steel plate shear walls, *Struct. Eng.*, 142 (2016) 10, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001547](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001547).
- [9] Dowden, D.M., Clayton, P.M., Li, C.H., Berman, J.W., Bruneau, M., Lowes, L.N., Tsai, K.C.: Full-scale pseudodynamic testing of self-centring steel plate shear walls, *Struct. Eng.*, 142 (2016) 1, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001367](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001367).
- [10] Yu, J.G., Feng, X.T., Li, B., Hao, J.P.: Cyclic performance of cross restrained steel plate shear walls with transverse braces, *Thin-Walled Struct.*, 132 (2018), pp. 250-264, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.08.020>.
- [11] Wang, X.T., Xie, C.D.: Experimental and numerical investigation of steel beam-to-cfsc column frame-thin steel plate shear walls with cross stiffness, *Steel Struct.*, 19 (2019), pp. 1895-1910, <https://doi.org/10.1007/s13296-019-00253-z>.
- [12] Barua, K., Bhowmick, A.K.: Nonlinear seismic performance of code designed perforated steel plate shear walls, *Steel and Composite Struct.*, 31 (2019) 1, pp. 85-98, <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2019.31.1.085>.
- [13] Curkovic, I., Skejic, D., Dzeba, I.: Seismic performance of steel plate shear walls with variable column flexural stiffness, *Steel and Composite Struct.*, 33 (2019) 1, pp. 1-18, <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2019.33.1.001>.
- [14] Bai, J., Zhang, J., Du, K., Jin, S.: A simplified seismic design method for low-rise dual frame-steel plate shear wall structures, *Steel and Composite Struct.*, 37 (2020) 4, pp. 447-462, <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2020.37.4.447>.
- [15] Azarafrooz, A., Shekastehband, B.: Behaviour of fully- connected and partially-connected multi-storey steel plate shear wall structures, *Struct. Eng. and Mech.*, 76 (2020) 3, pp. 311-324, <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2020.76.3.311>.
- [16] Fathy, E.: Seismic assessment of thin steel plate shear walls with outrigger system, *Struct. Eng. and Mech.*, 74 (2020) 2, pp. 267-282, <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2020.74.2.267>.
- [17] Liu, J.L., Xu, L.H., Li, Z.X.: Experimental study on component performance in steel plate shear wall with self-centring braces, *Steel and Composite Struct.*, 37 (2020) 3, pp. 341-351, <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2020.37.3.341>.
- [18] Jiang, R., Jiang, L., Hu, Y., Jiang, L., Ye, J.: A simplified method for fundamental period prediction of steel frames with steel plate shear walls, *The Struct. Design of Tall and Special Buildings*, 29 (2020) 7, <https://doi.org/10.1002/tal.1718>.
- [19] Zhao, Q., Qiu, J., Zhao, Y., Yu, C.: Estimating fundamental period of corrugated steel plate shear walls, *Struct. Eng.*, 24 (2020), pp. 3023-3033, <https://doi.org/10.1007/s12205-020-2305-2>.
- [20] Baikov, V.N., Sigalov, E.E.: Reinforced Concrete Structures, MIR Publishers, Moscow, Russia, 1981.
- [21] Köpeçsiri, A., Kollar, L.P.: Approximate analysis of tall building structures for earthquake using the Timoshenko-beam, *Period. Polytech. Civ. Eng.*, 42 (1998) 2, pp. 139-162.
- [22] Rahgozar, R., Safari, H., Kaviani, P.: Free vibration of tall buildings using timoshenko beams with variable cross-section, In Proceedings of SUSI VIII, Crete, Greece, pp. 233-243, 2004, [Doi 10.2495/SU040231](https://doi.org/10.2495/SU040231).
- [23] Boutin, C., Hans, S., Ibraim, E., Roussillon, P.: In situ experiments and seismic analysis of existing buildings—Part II: Seismic integrity threshold, *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 34 (2005) 12, pp. 1531-1546, <https://doi.org/10.1002/eqe.503>.

- [24] Ebrahimian, M., Todorovska, M.I.: Structural system identification of buildings by a wave method based on a nonuniform Timoshenko beam model, *J. Eng. Mech., ASCE*, 141 (2015) 8, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000933](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000933).
- [25] Cheng, M.H., Heaton, T.H.: Simulating building motions using ratios of the building's natural frequencies and a Timoshenko beam model, *Earth. Spectra*, 31 (2015) 1, pp. 403-420, <https://doi.org/10.1193/011613EQS003M>.
- [26] Su, R.K.L., Tang, T.O., Liu, K.C.: Simplified seismic assessment of buildings using non-uniform Timoshenko beam model in low-to-moderate seismicity regions, *Eng. Struct.*, 120 (2016), pp. 116-132, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.04.006>.
- [27] Taciroglu, E., Ghahari, S.F., Abazarsa, F.: Efficient model updating of a multi-storey frame and its foundation stiffness from earthquake records using a Timoshenko beam model, *Soil Dyn. And Earth. Eng.*, 92 (2017), pp. 25-35, <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2016.09.041>.
- [28] Ozmutlu, A., Ebrahimian, M., Todorovska, M.I.: Wave propagation in buildings as periodic structures: Timoshenko beam with rigid floor slabs model, *J. Eng. Mech.*, 144 (2018) 4, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001436](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001436).
- [29] Feretti, M.: Flexural torsional buckling of uniformly compressed beam-like structures, *Continuum Mech. Thermodyn.*, 30 (2018), pp. 977-993, <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0627-9>.
- [30] Feretti, M., D'Annibale, F.: Buckling of tower buildings on elastic foundation under compressive tip forces and self-weight, *Continuum Mech. Thermodyn.*, (2020), <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00911-2>.
- [31] Rajasekaran, S.: *Structural Dynamics of Earthquake Engineering: Theory and Application using Mathematica and Matlab*, Woodhead Publishing in Materials, CRC Press, India, 2009.
- [32] Paz, M., Kim, Y.H.: *Structural Dynamics: Theory and Computation*, Springer International Publishing, 2019.
- [33] Topkaya, C., Kurban, C.O.: Natural periods of steel plate shear wall systems, *Const. Steel Research*, 65 (2009) 3, pp. 542-551, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2008.03.006>.