

Primljen / Received: 22.2.2023.

Ispravljen / Corrected: 13.5.2023.

Prihvaćen / Accepted: 6.10.2023.

Dostupno online / Available online: 10.12.2023.

# Približni proračun kružnih AB stupova uz pomoć nomograma

## Autori:

**Li Lu**, dipl.ing.građ.

Sveučilište znanosti i tehnologije u Kunmigu  
Odjel za građevinarstvo  
Kina  
[1228982624@qq.com](mailto:1228982624@qq.com)

**Prof.dr.sc. Zhou Dong-hua**, dipl.ing.građ.

Sveučilište znanosti i tehnologije u Kunmigu  
Odjel za građevinarstvo  
Kina  
[806029639@qq.com](mailto:806029639@qq.com)  
Autor za korespondenciju

**Doc.dr.sc. Shuang Chao**, dipl.ing.građ.

Sveučilište znanosti i tehnologije u Kunmigu  
Odjel za građevinarstvo  
Kina  
[1403094948@qq.com](mailto:1403094948@qq.com)

Prethodno priopćenje

**Li Lu, Zhou Dong-hua, Shuang Chao**

## Približni proračun kružnih AB stupova uz pomoć nomograma

Proračun armature kružnih AB stupova uključuje ne samo dualnu nelinearnost geometrije i materijala, već i nelinearnost širine presjeka. Precizna rješenja zahtijevaju iterativne proračune. Da bi se ručno izradila metoda proračuna, predložena je metoda modela stupa kako bi se izračunao učinak drugog reda stupova, a metoda deformacije primijenjena je kako bi se analitički izračunala granična nosivost presjeka. Dobiveni su nomogrami potrebni za proračun količine armature u stupovima bez iteracije. Nomogram za proračun kapaciteta nosivosti presjeka i količine armature ima tri parametra (uzdužnu silu, moment savijanja i mehanički koeficijent armiranja). Nadalje, nomogram za proračun kapaciteta nosivosti stupa i količine armature ima pet parametara (uzdužnu silu, moment savijanja, zakrivljenost, koeficijent vitkosti i mehanički koeficijent armiranja), a odnos između tih pet parametara može se izraziti nacrtom zbog čega je ta primjena prikladna. Naposljetku, rezultati proračuna koje prikazuje nomograf uspoređeni su s onima koji su dobiveni postojećim formulama za približan proračun te s onima koji su dobiveni točnim numeričkim metodama, pa je tako potvrđena točnost nomograma.

### Ključne riječi:

kružni AB stup, učinak drugog reda, elementi izloženi tlaku i savijanju, proračun armature, nomogram

Research Paper

**Li Lu, Zhou Dong-hua, Shuang Chao**

## Approximate calculation of circular reinforced concrete columns with nomograms

Calculating the reinforcement of circular reinforced concrete (RC) columns involves not only the dual nonlinearity of the geometry and material but also the nonlinearity of the section width. Accurate solutions require iterative calculations. To develop the calculation method manually, the model column method was proposed to compute the second-order effect of the columns, and the strain method was used to calculate the ultimate strength of the sections analytically. The nomograms required to calculate the reinforcing steel content of the columns without iterations were obtained. The nomogram for calculating the section bearing capacity and reinforcing steel has three parameters (axial force, bending moment, and mechanical ratio of the reinforcing steel). Further, the nomogram for calculating the column bearing capacity and reinforcing steel has five parameters (axial force, bending moment, curvature, slenderness ratio, and mechanical ratio of the reinforcing steel), and the relationship between the five parameters can be expressed in a plan, which makes the application convenient. Finally, the calculation results of the nomograph were compared with those of the existing approximate calculation formulas and exact numerical methods, and the accuracy of the nomograms was verified.

### Key words:

circular RC column, second-order effect, compression and bending members, reinforcement calculation, nomogram

### 1. Uvod

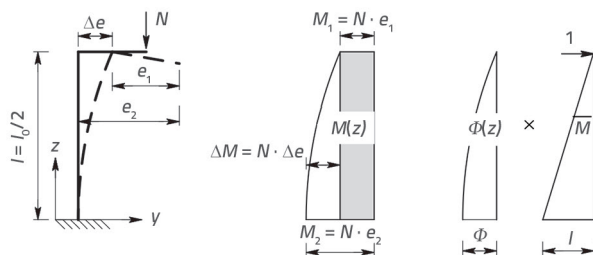
Široko rasprostranjen praktični pristup za analiziranje i projektiranje presjeka temelji se na primjeni interakcijskog dijagrama s ciljem da se izračuna otpornost kružnih AB presjeka [1]. Proračun otpornosti kružnog AB presjeka koji primjenjuje pojednostavljene formule u Eurokodu 2, zahtijeva iteracije [2]. Interakcijski dijagrami i formule sastavljeni su primjenom numeričkih programa potpomognutih računalom [3]. Kompaktna formulacija zatvorenog tipa ne zahtijeva numeričko rješenje predloženo jednačbom ravnoteže [4]. Proračun nosivosti kružnog AB presjeka iznimno je složen bez uzimanja u obzir učinaka drugog reda. Ne mogu se zanemariti učinci drugog reda kad su u pitanju stupovi izloženi kombinaciji momenta savijanja i uzdužne sile jer kad se vitkost povećava, kapacitet nosivosti stupova se smanjuje [5]. Zato su bile predložene dvije metode koje se temelje na nominalnoj krutosti i zakrivljenosti [2, 6]. Štoviše, predloženo je nekoliko metoda za proračun krajnje otpornosti i duktilnosti pravokutnih AB stupova [5, 7-16], te je predložen jednostavni analitički odnos između momenta savijanja i zakrivljenosti kružnih AB poprečnih presjeka [17, 18]. Cilj je ovog istraživanja omogućiti proračune za kružne AB stupove bez iterativnih računalnih i numeričkih postupaka. Metoda deformacije koja je primijenjena u ovom istraživanju [19], odnosno naprezanja i otpornost, mogu se izračunati na temelju poznate deformacije i konstitutivnog zakona ponašanja betona i armature, a bez primjene ikakvih jednostavnih ili iterativnih proračuna. Osim toga, točan odnos između momenta savijanja i zakrivljenosti može se izračunati, a progib i duktilnost stupova mogu se odrediti iz deformacije i poprečnih presjeka. Iz toga proizlazi da se ručno proračunava armature i moment savijanja drugog reda kružnih AB stupova možda zbog toga što je unutarnja otpornost poprečnog presjeka povezana s djelovanjem vanjskog opterećenja. Bila je provedena usporedna analiza primjenom približnih formula [4] za otpornost presjeka. Primjenom betonskih primjera, metoda izračuna otpornosti (nomogram) za kružne AB stupove koji uzimaju u obzir učinak drugog reda uspoređena je s točnom numeričkom metodom, te je točnost nomograma bila potvrđena. Predloženim nomogramom učinkovito je određen inicijalni presjek stupova u preliminarnoj fazi projektiranja te je potvrđen presjek u fazi dokazivanja. U ovom istraživanju proračuni prvog reda presjeka pokazuju neke sličnosti s metodama proračuna navedenim u literaturi [19-21], a proračuni drugog reda stupova pokazuju neke sličnosti s radom [22].

### 2. Proračun progiba i momenta savijanja drugog reda kod stupova

#### 2.1. Model stupa koji uzima u obzir učinak drugog reda

Da bi se proveo proračun deformacije, ključno je odrediti promjenu krutosti presjeka (EI), kao što je prikazano metodom

koja se temelji na nominalnoj krutosti u Eurokodu 2. Parametri presjeka poput visine, širine i količina armature moraju biti poznati kako bi se izračunala krutost presjeka, gdje je količina armature nepoznata. Stoga je za proračun krutosti presjeka osobito važno odrediti raspodjelu i magnitudu zakrivljenosti. S tim u vezi odabran je konzolni stup kao reprezentativni model stupa za proračune (model stupa prikazan na slici 1.).



Slika 1. Dijagram koji prikazuje postupak proračuna stupa (model stupa: konzolni stup).

Kao što je prikazano na slici 1.,  $M_2$  je ukupni moment savijanja na upetom kraju stupa,  $M_1$  je moment savijanja prvog reda,  $\Delta M$  je moment savijanja drugog reda, a  $e_1$ ,  $\Delta e$  i  $e_2$  odnose se na ekscentričnost po prvom redu, po drugom redu, odnosno ukupna ekscentričnost.

Pod pretpostavkom da je krivulja raspodjele zakrivljenosti po dužini stupa parabola, a da je zakrivljenost presjeka na upetom kraju stupa  $\Phi$ , proračun je prikazan izrazom (4). Primjenom metode površine momenta savijanja,  $\Delta e$  može se izračunati na sljedeći način:

$$\Delta e = \int \Phi(z) \bar{M} dz = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \Phi \cdot \frac{5}{8} \cdot l = \frac{5}{48} \Phi l_0^2 \tag{1}$$

Tada se  $M_2$  na upetom kraju stupa može izračunati na sljedeći način:

$$M_2 = N e_1 + N \Delta e = N e_1 + \frac{5}{48} N \Phi l_0^2 \tag{2}$$

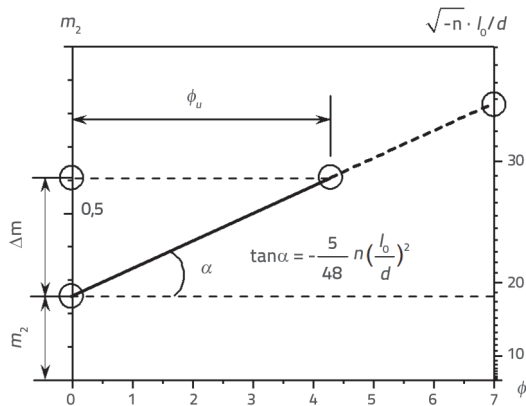
Stvarna duljina konzolnog stupa zamijenjena je efektivnom duljinom  $l_0$ , tj. ( $l_0 = 2l$ ) jer se svaki stup može izolirati iz konstrukcija [23] te postaje samostalan jedinstveni stup na jednakoj efektivnoj duljini  $l_0$ . Izraz (2) može se primijeniti kako bi se izračunao progib drugog reda i moment savijanja drugog reda koji su rezultat učinka P- $\Delta$  (pomični okvir) i P- $\delta$  (nepomični okvir) bilo kojeg stupa u konstrukciji, a magnituda učinka P- $\Delta$  i P- $\delta$  stoga je određena efektivnom duljinom  $l_0$ .

Ukupni moment savijanja  $M_2$  može se dobiti primjenom izraza (2), a bezdimenzijski moment savijanja  $m_2$  računa se na sljedeći način:

$$m_2 = \frac{M_2}{\pi r^2 d f_{cd}} = \underbrace{m_1}_{\text{prvog reda}} + \underbrace{\frac{\Delta m}{d}}_{\text{drugog reda}} = \underbrace{m_1}_{\text{prvog reda}} + \underbrace{-\frac{5}{48} n \left(\frac{l_0}{d}\right)^2 \phi}_{\text{drugog reda}} \tag{3}$$

U izrazu (3):  $m_2 = m_1 + \Delta m$ ,  $\phi = \Phi d$ . Izraz (3) je linearna jednačbna koja ima bezdimenzijsku zakrivljenost  $\phi$  kao neovisnu varijablu;

njezin odsječak je  $m_1$  (bezdimenzijski moment savijanja prvog reda), a njezin nagib je  $-0,104n(l_0/d)^2$ , kao što prikazuje slika 2. Ako se pridruži dodatna koordinatna os  $\sqrt{-n} \cdot l_0/d$  desnoj strani slike 2., nagib se može izravno odrediti primjenom  $\sqrt{-n} \cdot l_0/d$ . Slika 2. prikazuje dio dijagrama za proračun količine armature.



Slika 2. Ekscentrična udaljenost drugog reda vanjskog učinka

Kao što je prikazano na slici 2., ako su poznati  $m_1$  i  $\sqrt{-n} \cdot l_0/d$ , može se odrediti kosa ravna linija. Bezdimenzijski moment savijanja drugog reda  $\Delta m$  jednak je povećanju kose linije koja prati povećanje bezdimenzijske zakrivljenosti  $\phi$ . Međutim,  $\phi$  ne može premašiti bezdimenzijsku graničnu zakrivljenost  $\phi_u$  i  $\phi_u$  variraju sa sljedećim vrijednostima presjeka:  $M_2$ ,  $N$  i količinom armature. Ukratko,  $\phi_u$  kontrolira  $\Delta m$  u presjeku.

### 3. Proračun granične zakrivljenosti i otpornosti presjeka

#### 3.1. Raspodjele deformacija betona i čelika

Na temelju geometrijskog odnosa između deformacije prikazane na slici 3. i hipoteze ravnih presjeka, zakrivljenost presjeka  $\Phi$  može se izračunati na sljedeći način, sukladno izrazu (4):

$$\Phi = \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2}}{d} \quad (4)$$

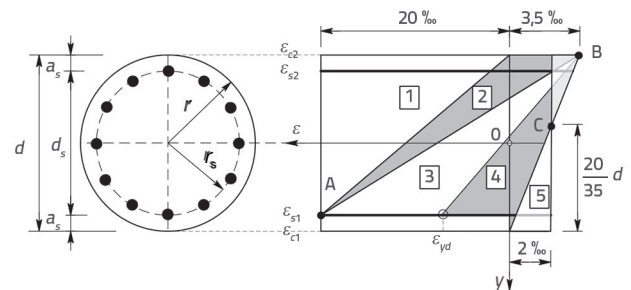
Nakon dobivanja  $\Phi$  u izrazu (4), a kako bi bio bezdimenzijski, dobivamo:

$$\phi = \Phi \cdot d = \varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2} \quad (5)$$

gdje je  $\varepsilon_{c1}$  deformacija gornjeg ruba,  $\varepsilon_{c2}$  deformacija donjeg ruba, a  $d$  promjer presjeka, kao što je prikazano na slici 3.

Otpornost presjeka i bezdimenzijska granična zakrivljenost  $\phi_u$  presjeka dobivaju se primjenom poznatih krajnjih deformacija presjeka. Prema EC2, krajnja tlačna deformacija betona iznosi  $-3.5 \text{ ‰}$ , a vlačna deformacija armaturnog čelika iznosi  $20 \text{ ‰}$ . Stoga se sve raspodjele deformacije u presjeku mogu odrediti i podijeliti u pet zona. U svakoj zoni

barem jedno vlakno unutar presjeka doseglo je krajnju tlačnu deformaciju betona ili krajnju vlačnu deformaciju armaturnog čelika (slika 3.).



Slika 3. Kružni AB poprečni presjek: geometrija i krajnje raspodjele deformacije

#### Zona 1 (rotacija oko točke B)

Neutralna os pada od točke beskonačnosti iznad presjeka do gornjeg ruba presjeka. Stanje naprezanja prelazi iz ravnomjernog vlakna u ekscentrični vlak s malom ekscentričnošću. Na lijevom rubu područja raspodjele deformacije predstavlja ravnomjerni vlak pri kojem deformacija armiranog čelika na oba kraja presjeka postiže vrijednost  $\varepsilon_s = 20 \text{ ‰}$ .

#### Zona 2 (rotacija oko točke A) i zona 3 i 4 (rotacija oko točke B)

Dio presjeka bio je pod tlakom, a neutralna os postupno se pomaknula s gornjeg ruba na donji rub presjeka. Slučajevi opterećenja prešli su s vlakna s niskom ekscentričnošću na vlak s visokom ekscentričnošću, čisto savijanje, tlak s visokim ekscentričnošću i tlak s niskom ekscentričnošću.

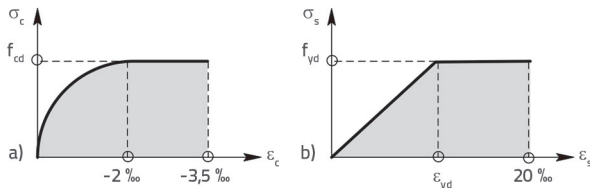
#### Zona 5 (rotacija oko točke C)

To je zakošeno područje u kojem se desna rubna linija područja 4 rotira u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko točke C sve dok nije vertikalno položena (točka C može se izračunati iz geometrijskog odnosa između deformacija na gornjem i donjem rubu). Čitavi presjek je pod tlakom, a neutralna se os pomaknula s dna presjeka na beskonačnost ispod presjeka. Slučajevi opterećenja u području mogu biti tlak s malom ekscentričnošću ili ravnomjerni tlak.

Važno je napomenuti da se naprezanje neprestano mijenja iz zone 1 u zonu 5, a odgovarajući slučajevi opterećenja također se postupno mijenjaju.

### 3.2. Konstitutivni odnos

Prema konstitutivnom odnosu AB-a u Eurokodu 2, odnos deformacija i naprezanja parabola-pravac bio je primijenjen za beton u tlaku, a odnos elastičan-idealno plastičan primijenjen je na armaturni čelik (slika 4.). Ovo istraživanje usmjereno je na beton s karakterističnom čvrstoćom  $f_{ck}$  koja je manja ili jednaka  $50 \text{ MPa}$ , a vlačna čvrstoća betona bila je zanemarena.



Slika 4. Konstitutivni odnos materijala: a) beton; b) armaturni čelik

Matematički izrazi za konstitutivni odnos armaturnog čelika odnosno betona u Eurokodu 2 su sljedeći:

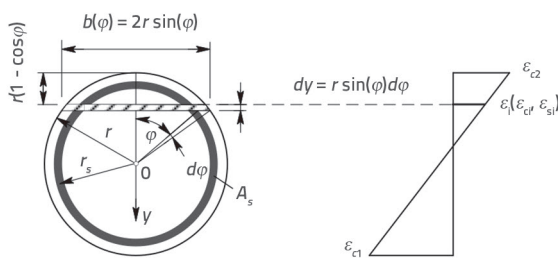
$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \epsilon_s & 0 < |\epsilon_s| < \epsilon_{yd} \\ f_{yd} & \epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \\ -f_{yd} & \epsilon_s \leq -\epsilon_{yd} \end{cases} \quad (6)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} -f_{cd} (1 - (1 - \frac{\epsilon_c}{-2.0\text{‰}})^2) & 0 > \epsilon_c > -2.0\text{‰} \\ -f_{cd} & -2.0\text{‰} \geq \epsilon_c \geq -3.5\text{‰} \end{cases} \quad (7)$$

U izrazima (6) i (7),  $\epsilon_c, \sigma_c, f_{cd}, \epsilon_{s1}, \sigma_{s1}, \epsilon_{yd}, f_{yd}$  i  $E_s$  su tlačna deformacija i naprezanje, projektirana tlačna čvrstoća betona, deformacija i naprezanje armaturnog čelika, projektirana granica popuštanja i deformacija pri popuštanju armaturnog čelika, odnosno modul elastičnosti armaturnog čelika.

### 3.3. Naprezanje i otpornost betona

Nakon određivanja distribucije deformacije u presjeku u krajnjem stanju, izračunana je otpornost presjeka primjenom poznate vrijednosti deformacije.



Slika 5. Kružni AB poprečni presjek: geometrija i deformacije

Deformacija na bilo kojoj visini unutar poprečnog presjeka može se izračunati kao:

$$\epsilon_{ci} = \epsilon_{c2} - \frac{(1 - \cos(\varphi))}{2} (\epsilon_{c2} - \epsilon_{c1}) \quad (8)$$

Zamjenjujući vrijednost  $\epsilon_{ci}$  iz izraza (8) u izraz (7), naprezanje betona  $\sigma_{ci}$  na bilo kojem vlaknu unutar poprečnog presjeka može se izračunati, a uzdužna sila i moment savijanja betona mogu se izračunati integracijom naprezanja po poprečnom presjeku.

$$N_c(\epsilon_{ci}) = \int_0^\pi \sigma_{ci}(\epsilon_{ci}) b(\varphi) r \sin(\varphi) d\varphi \quad (9)$$

$$M_c(\epsilon_{ci}) = \int_0^\pi \sigma_{ci}(\epsilon_{ci}) b(\varphi) \cdot r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$$

Izraz (9) funkcija je deformacije na bilo kojoj visini unutar poprečnog presjeka ( $\epsilon_{ci}$ ). Da bi se dobio općenitiji bezdimenzijski izraz, koeficijent uzdužne sile  $n_c$  i bezdimenzijski moment savijanja  $m_c$  betona mogu se izračunati na sljedeći način:

$$\begin{cases} n_c(\epsilon_{ci}) = \frac{N_c(\epsilon_{ci})}{\pi r^2 f_{cd}} \\ m_c(\epsilon_{ci}) = \frac{M_c(\epsilon_{ci})}{\pi r^2 d f_{cd}} \end{cases} \quad (10)$$

### 3.4. Naprezanje i otpornost armaturnog čelika

Pod pretpostavkom da je armatura ravnomjerno raspodijeljena na udaljenosti  $r_s$  od težišta betonskog presjeka, površina armature po jedinici radijana iznosi

$$\bar{A}_s = \frac{A_s}{2\pi} \quad (11)$$

Deformacija armaturene šipke može se jednostavno dobiti iz odnosa deformacije prikazanog na slici 5. Deformacija armaturnog čelika na bilo kojem vlaknu poprečnog presjeka može se izračunati kao:

$$\epsilon_{si}(\varphi) = \epsilon_{c2} - \frac{(r - r_s \cos(\varphi))}{2r} (\epsilon_{c2} - \epsilon_{c1}) \quad (12)$$

Zamjenjujući vrijednost  $\epsilon_{si}(\varphi)$  iz izraza (12) u izraz (6) može se izračunati naprezanje u armaturnom čeliku  $\sigma_{si}(\varphi)$  na bilo kojem vlaknu poprečnog presjeka, a uzdužna sila i moment savijanja armaturnog čelika mogu se dobiti integracijom.

$$\begin{cases} N_s(\bar{A}_s, \epsilon_{si}) = 2 \int_0^\pi \sigma_{si}(\epsilon_{si}) \bar{A}_s r_s d\varphi \\ M_s(\bar{A}_s, \epsilon_{si}) = 2 \int_0^\pi \sigma_{si}(\epsilon_{si}) \bar{A}_s r_s^2 \cos(\varphi) d\varphi \end{cases} \quad (13)$$

Izraz (14) je određena za bezdimenzijske vrijednosti na sljedeći način. Bezdimenzijski koeficijent uzdužne sile  $n_s$  i bezdimenzijski moment savijanja  $m_s$  armaturnog čelika mogu se dobiti kao:

$$\begin{cases} n_s(\omega, \epsilon_{si}) = \frac{N_s}{\pi r^2 f_{cd}} = \frac{\omega}{\pi f_{yd}} \int_0^\pi \sigma_{si}(\epsilon_{si}) d\varphi \\ m_s(\omega, \epsilon_{si}) = \frac{M_s}{\pi r^2 d f_{cd}} = \frac{\omega}{\pi f_{yd}} \frac{r_s}{r} \int_0^\pi \sigma_{si}(\epsilon_{si}) \cos(\varphi) d\varphi \end{cases} \quad (14)$$

U izrazu (14),  $\omega$  (mehanički koeficijent armiranja) definira se na sljedeći način:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{\pi r^2 f_{cd}} \quad (15)$$

### 3.5. Otpornost potpunog presjeka

Bezdimenzijska otpornost presjeka zbroj je bezdimenzijskih otpornosti betona i armaturnog čelika. Deformacija  $\epsilon_{ci}$  i  $\epsilon_{si}$  na

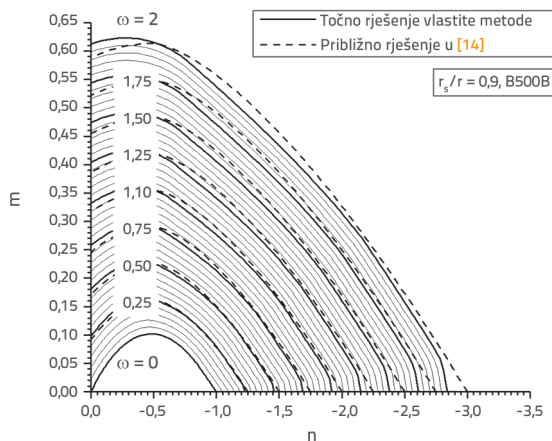
bilo kojoj visini poprečnog presjeka može se odrediti primjenom deformacije presjeka  $\epsilon_{c1}$  i  $\epsilon_{c2}$ . Bezdimenzijski koeficijent uzdužne sile  $n$  i bezdimenzijski moment savijanja  $m$  presjeka mogu se izraziti sa  $\epsilon_{c1}$ ,  $\epsilon_{c2}$  i  $\omega$ :

$$\begin{cases} n = n_c(\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}) + n_s(\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}, \omega) \\ m = m_c(\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}) + m_s(\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}, \omega) \end{cases} \quad (16)$$

Dvije jednadžbe u izrazu (16) su nelinearne, a svaka jednadžba sadrži tri neovisne varijable:  $\epsilon_{c1}$ ,  $\epsilon_{c2}$  i  $\omega$ . Prilikom proračuna otpornosti poprečnog presjeka, vrijednosti  $\epsilon_{c1}$  i  $\epsilon_{c2}$  mogu se dobiti prema slici 3.

### 3.6. Interakcija bezdimenzijskog momenta, uzdužne sile i količine armature

Može se prihvatiti slika 6. kako bi se izračunala količina armaturnog čelika kružnog AB presjeka. Kada su  $\omega$  i  $n$  poznati, krajnje deformacije  $\epsilon_{c1}$  i  $\epsilon_{c2}$  mogu se dobiti iz prve jednadžbe unutar izraza (16), a raspodjela krajnjih deformacija presjeka prikazana je na slici 3. Bezdimenzijski krajnji moment savijanja  $m_u$  može se izračunati primjenom druge jednadžbe unutar izraza (16). Dobiven je odgovarajući odnos između  $n$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon_{c1}$ ,  $\epsilon_{c2}$  i  $m_u$ .



Slika 6. Odnos između krajnjeg bezdimenzijskog momenta savijanja i mehaničkog koeficijenta armiranja

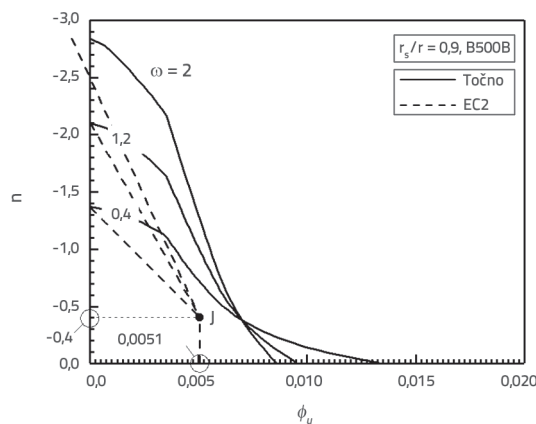
Slika 6. prikazuje da je metoda proračuna koja se primjenjuje u ovom istraživanju vrlo bliska rezultatima izračuna približne formule [4], što potvrđuje ispravnost te metode. Slika 6. prikazuje dio nomograma koji je prihvaćen za proračun količine armaturnog čelika kružnih AB stupova. Ordinata  $m$  na slici 6. predstavlja otpornost presjeka koja odgovara učinku djelovanja prikazanom na slici 2.

### 3.7. Interakcija bezdimenzijske uzdužne sile, granične zakrivljenosti i količine armature

Kada je poznat mehanički koeficijent armiranja  $\omega$ , kapacitet krajnje deformacije (bezdimenzijska granična zakrivljenost  $\phi_u$ )

varira zajedno s bezdimenzijskom uzdužnom silom  $n$ . Stoga se mora uzeti u obzir odnos između  $n$  i  $\phi_u$ .

S obzirom na granična naprezanja  $\epsilon_{c1}$  i  $\epsilon_{c2}$ , a u skladu sa slikom 3., izrazi (5) i (16) mogu se primijeniti kako bi se izračunao  $\phi_u$ ,  $n$  i  $m$ , te analizirali njihovi odnosi. Postavljanjem  $n$  kao ordinate i  $\phi_u$  kao apscise, mogu se nacrtati krivulje točnog odnosa između  $\phi_u$  i  $n$ , kao što je prikazano na slici 7. Slika 7. prikazuje rezultate dobivene proračunom primjenjujući jednostavne formule iz Eurokoda 2.

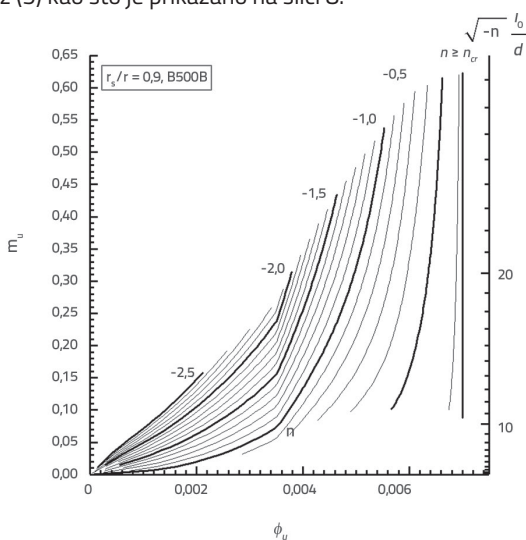


Slika 7. Odnos bezdimenzijske uzdužne sile i bezdimenzijske granične zakrivljenosti

Na slici 7. točan odnos između  $\phi_u$  i  $n$  je nelinearan; međutim, jednadžbe u Eurokodu 2 su linearne i znatno drugačije u odnosu na točne rezultate.

### 3.8. Interakcija bezdimenzijskog momenta, granične zakrivljenosti i uzdužne sile

Na temelju odnosa između  $\phi_u$ ,  $n$ ,  $m_u$  i  $\omega$  na slici 7. apscisa na slici 7. zamijenjena je sa  $\phi_u$  koji je dobiven proračunom primjenjujući izraz (5) kao što je prikazano na slici 8.



Slika 8. Odnos između bezdimenzijske ukupne ekscentričnosti i bezdimenzijske granične zakrivljenosti



Sljedeće stavke mogu se dobiti sa slike 8.:

- kada je  $n$  stalan,  $m$  se proporcionalno povećava za  $\phi_u$ .
- kada je  $\omega$  konstanta poput  $\omega = 2$ , tada što je veći  $n$ , to su manji  $m_u$  i  $\phi_u$ . To podrazumijeva da se smanjuje kapacitet deformacije i nosivost na moment savijanja presjeka.

### 4. Proračun mehaničkog koeficijenta armiranja uzimajući u obzir učinke drugog reda

#### 4.1. Nomogram za proračun količine armaturnog čelika u stupovima

Kao prvo, slike 8. i 2. preklapaju se u tlocrtu jer su njihove dvije osi iste. Kad su  $n$ ,  $m_1$  i  $l_0/d$  poznati, kosa linija na slici 2. može se primijeniti kako bi predstavila učinak djelovanja, a točka sjecišta kose linije i  $n$  krivulje na slici 8. može se locirati uz pomoć zadane  $n$ . Ordinata točke sjecišta krajnji je moment savijanja presjeka  $m_u$ , a apscisa je bezdimenzijska granična zakrivljenost  $\phi_u$  presjeka. Osim toga, potrebni mehanički koeficijent armiranja  $\omega$  može se odrediti primjenom slike 6. jer je na slici prikazana ista ordinata kao na slikama 2. i 8. Slika 9. nastala je kombiniranjem triju slika (slike 2., 6. i 8.) kako bi se izračunala količina armaturnog čelika u stupovima te otpornost stupova, a pritom izravno uzimajući u obzir učinke drugog reda. Opća primjena slike 9. provodi se na sljedeći način:

- povezati ishodište koordinatnog sustava i  $l_0/d \cdot \sqrt{-n}$  kako bi se dobila linija 1

- nacrtati liniju 2 paralelnu s linijom 1, a vertikalno odmaknutu za vrijednost  $m_1$
- od sjecišta krivulje  $n$  i linije 2 nacrtati horizontalnu liniju 3
- $m_2$  je dobivena na ordinati linije 3
- od apscise  $n$  nacrtati vertikalnu liniju 4 koja će tvoriti sjecište s linijom 3, a to je  $\omega$ .

Osim toga, učinci skupljanja i puzanja betona zanemareni su u analizi kako bi se izbjegli brojni nomogrami koji bi ovisili o skupljanju i puzanju betona.

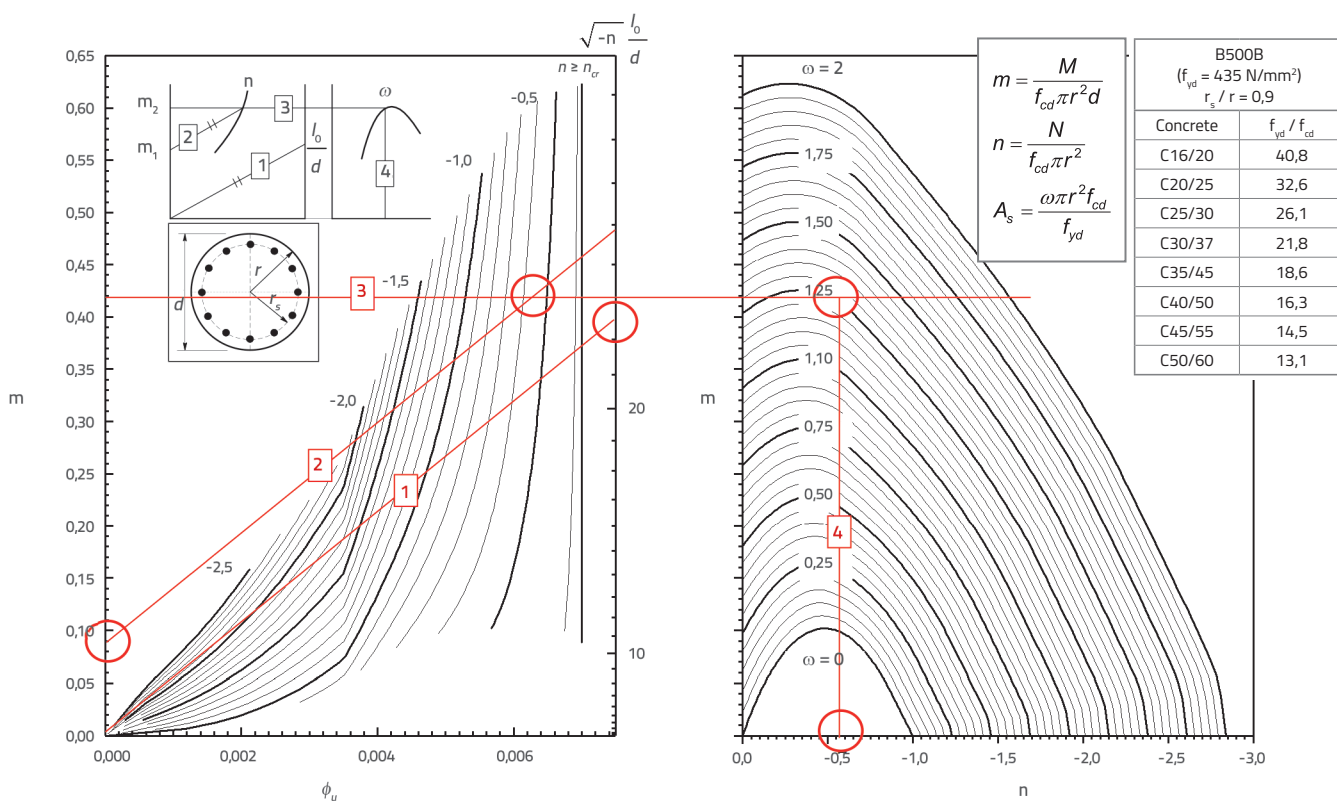
#### 4.2. Specifični primjeri za nomogram

Odredit će se količina armature potrebne u AB kružnom stupu dimenzija  $d = 600$  mm,  $r_s = 270$  mm i  $l_0 = 18$  m pri djelovanju uzdužne tlačne sile  $N = -3200$  kN i momenta savijanja prvog reda  $M_1 = 300$  kN, uzimanjem u obzir učinke drugog reda. Proračunske karakteristike betona i armature su: C30/37,  $f_{ck} = 30$  N/mm<sup>2</sup>,  $f_{cd} = 20$  N/mm<sup>2</sup>, B500B,  $f_{yk} = 500$  N/mm<sup>2</sup> i  $f_{yd} = 435$  N/mm<sup>2</sup>. Bezdimenzijski moment savijanja prvog reda  $m_1$  iznosi:

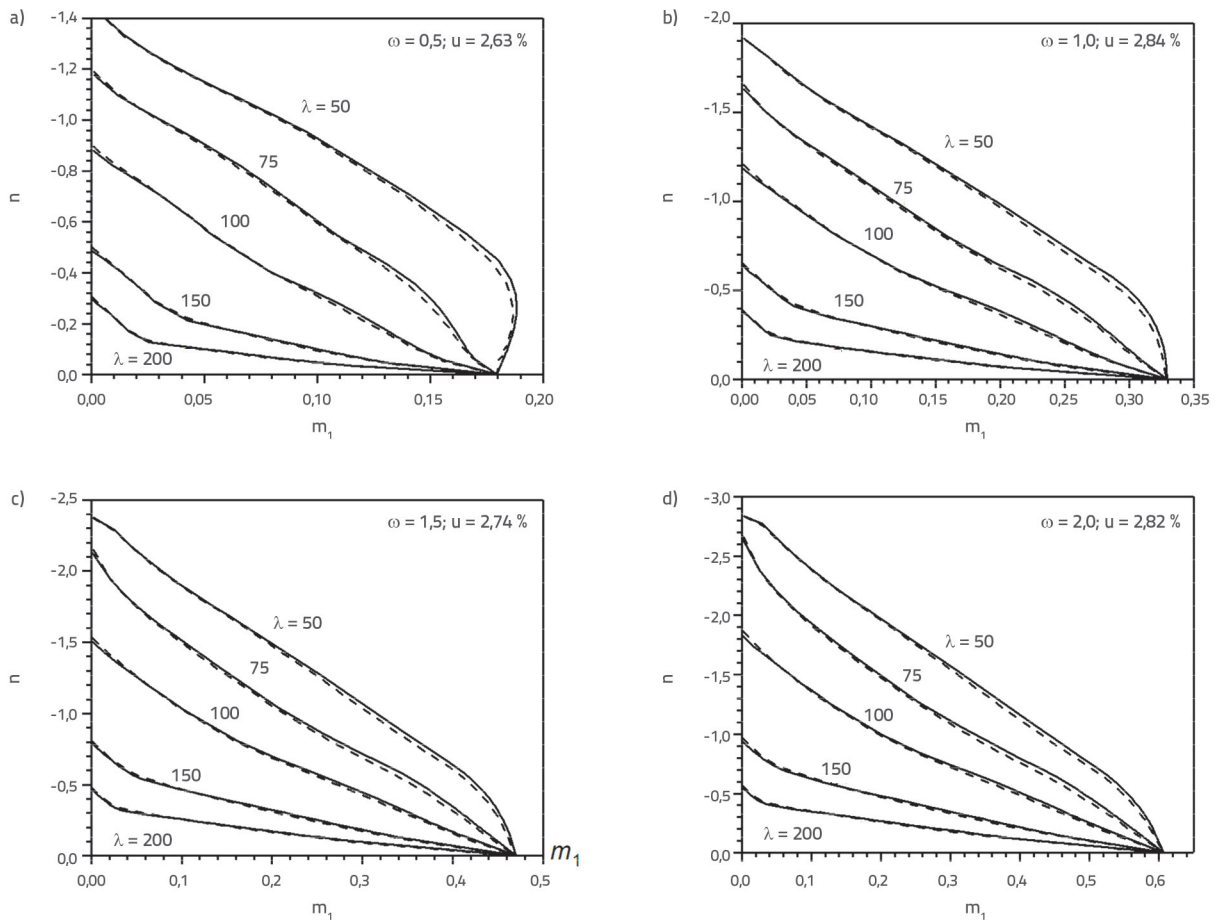
$$m_1 = \frac{4M_1}{f_{cd}\pi d^3} = \frac{4 \times 300 \times 10^6}{20 \times \pi \times 600^3} = 0.088$$

$n$  se računa kao:

$$n = \frac{4N}{\pi d^2 f_{cd}} = \frac{4 \times -3200 \times 10^3}{\pi \times 600^2 \times 20} = -0.566$$



Slika 9. Nomogram proračuna količine armaturnog čelika i otpornosti kružnih AB stupova



Slika 10. Usporedba između dijagrama koji prikazuje interakciju točne metode (iscrtkana linija) i nomograma (puna linija) za neke AB stupove s kružnim poprečnim presjekom:  $r_s/r = 0,9$ ,  $f_{yd} = 435 \text{ N/mm}^2$

Povezano je ishodište koordinatnog sustava i  $l_0/d \cdot \sqrt{-n} = 22,570$  kako bi se dobila linija 1, kao što je prikazano na slici 9. Na temelju  $m_1 = 0,088$  može se nacrtati linija 2 paralelna s linijom 1. Linija 3 dobivena je crtanjem horizontalne linije kroz sjecište krivulje  $n = -0,566$  i linije 2. Ukupni bezdimenzijski moment savijanja  $m_2 = 0,419$  može se vidjeti na ordinati linije 3. Linija 4 dobivena je crtanjem vertikalne linije kroz sjecište linije 3 i krivulje koja prikazuje odnos  $m$  i  $n$ . Tada,  $\omega$  se može dobiti, a potrebna površina armature može se izračunati kao:

$$A_s = \frac{\omega \pi d^2 f_{cd}}{4 f_{yd}} = \frac{1,25 \times \pi \times 600^2 \times 20}{4 \times 435} = 16174 \text{ mm}^2$$

Ukupni moment savijanja iznosi:

$$M_2 = \frac{m_2 \cdot f_{cd} \pi d^3}{4} = \frac{0,419 \times 20 \times \pi \times 600^3}{4} = 1422 \text{ kNm}$$

### 4.3. Primjeri za usporedbu nomograma i točnog rješenja

Nomogram AB stupova s kružnim poprečnim presjecima bio je dodatno potvrđen u usporedbi s točnim rješenjem. Usporedba je

potvrdila zadovoljavajuću točnost nomograma. Maksimalne apsolutne pogreške nomograma  $\tilde{\omega}$  prikazane su na slici 10. Ovi rezultati potvrdili su da je nomogram pokazao izvrsnu bliskost s točnom metodom.

## 5. Zaključak

Analitička formula za proračun količine armature i kapaciteta nosivosti kružnog presjeka dobivena je na temelju metode deformacije, a odgovarajući nomogrami bili su kako slijedi:

- (prvog reda) dijagrami koji prikazuju interakciju triju parametara  $(n-m_1-\omega)$ , iz kojih se može izračunati mehanički koeficijent armiranja  $\omega$  i to iz  $n$  i  $m_1$ .
- (drugog reda) dijagrami koji prikazuju interakciju četiriju parametara  $(n-m_1-l_0-\omega)$ , iz kojih se može izračunati moment drugog reda  $m_2$  te odgovarajući mehanički koeficijent armiranja  $\omega$  i to iz  $n$ ,  $m_1$ , i  $l_0$ .

Najveća prednost metode u ovom istraživanju je ta da se problem nelinearnog proračuna može riješiti bez iteracije, odnosno, nakon dobivanja poprečnog presjeka betona i

armature, naprezanja i unutarnjih sila mogu se izračunati iz deformacija, te se mogu dobiti sva rješenja u čitavom graničnom području deformacije.

Svi nomogrami imaju bezdimenzijski oblik koji se može koristiti za kružne poprečne presjeka svih promjera i čvrstoće betona razreda C50/60 i manjeg, a koji se pokazuju vrlo praktičnima. Načelo ove metode može

se također primijeniti za betone visokih čvrstoća ili za vlaknima armirane betone.

## Zahvala

Opisano istraživanje financijski podržava Kineska zaklada prirodnih znanosti.

## LITERATURA

- [1] Vaz Rodrigues, R.: A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending, *Engineering Structures*, 104 (2015), pp. 1-17. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.09.016>
- [2] EN1992 EC2, Design of concrete structures, 2004.
- [3] Smolcic, Z., Grandic, D.: Interaction diagrams for reinforced concrete circular cross-section, *GRADEVINAR*, 64 (2012) 1, pp. 23-31.
- [4] Quaranta, G., Trentadue, F., Marano, G.C.: Closed-form approximation of the axial force-bending moment interaction diagram for hollow circular reinforced concrete cross-sections, *Engineering Structures*, 153 (2017), pp. 516-524.
- [5] Babazadeh, A., Burgueno, R., Silva, P.F.: P- $\delta$  Effects on the Plastic Region of RC Bridge Columns: Closed-Form Solution, *Journal of Structural Engineering*, 142 (2016), pp. 1-11.
- [6] De Araújo, J.M.: Comparative study of the simplified methods of Eurocode 2 for second order analysis of slender reinforced concrete columns, *Journal of Building Engineering*, 14 (2017), pp. 55-60. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2017.10.003>
- [7] Bonet, J.L., Romero, M.L., Miguel, P.F.: Effective flexural stiffness of slender reinforced concrete columns under axial forces and biaxial bending, *Engineering Structures*, 33 (2011) 3, pp. 881-893.
- [8] Kwak, H.G., Kim, J.K.: Ultimate resisting capacity of slender RC columns, *Computers & Structures*, 82 (2004) 11, pp. 901-915. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.02.019>
- [9] Kwak, H.G., Kim, J.K.: Nonlinear behavior of slender RC columns: (1). Numerical formulation, *Construction and Building Materials*, 20 (2006) 8, pp. 527-537. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2005.01.036>
- [10] Kwak, H.G., Kwak, J.H.: An improved design formula for a biaxially loaded slender RC column, *Engineering Structures*, 32 (2010) 1, pp. 226-237. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.09.009>
- [11] Majewski, T., Bobinski, J., Tejchman, J.: FE analysis of failure behaviour of reinforced concrete columns under eccentric compression, *Engineering Structures*, 30 (2008) 2, pp. 300-317. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.03.024>
- [12] Perdomo, C., Monteiro, R.: Simplified damage models for circular section reinforced concrete bridge columns, *Engineering Structures*, 217 (2020), pp. 110794. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110794>
- [13] Porras, R., Carmona, J.R., Yu, R.C., et al.: Experimental study on the fracture of lightly reinforced concrete elements subjected to eccentric compression, *Materials and Structures*, 49 (2016) 1, pp. 87-100. doi: [10.1617/s11527-014-0476-3](https://doi.org/10.1617/s11527-014-0476-3)
- [14] Xu, J., Gong, J.X.: Nonlinear Second-Order Effect of Non-Sway Columns, *Acı Structural Journal*, 110 (2013) 5, pp. 755-765.
- [15] Barrera, A.C., Bonet, J.L., Romero, M.L., et al.: Ductility of slender reinforced concrete columns under monotonic flexure and constant axial load, *Engineering Structures*, 40 (2012), pp. 398-412. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.012>
- [16] de Araujo, J.M.: A non-linear model for analysis and design of slender reinforced-concrete columns, *Magazine Of Concrete Research*, 71 (2019) 6, pp. 287-297. doi: [10.1680/jmacr.17.00428](https://doi.org/10.1680/jmacr.17.00428)
- [17] Kowalsky, M.J.: Deformation limit states for circular reinforced concrete bridge columns, *Journal of Structural Engineering-Asce*, 126 (2000) 8, pp. 869-878. doi: [10.1061/\(asce\)0733-9445\(2000\)126:8\(869\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2000)126:8(869))
- [18] Gentile, R., Porco, F., Raffaele, D., Uva, G.: Simplified moment-curvature relationship in analytical form for circular RC sections, *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 51 (2018) 3, p. 14.
- [19] Donghua, Z., Qiongfeng, W., Jiang, F.: A new method for the calculation of reinforcement of concrete: general dimensionless designing diagram, *Engineering Mechanics*, 27 (2010) 01, pp. 165-172.
- [20] Laora, R.D., Galasso, C., Mylonakis, G., et al.: A simple method for N-M interaction diagrams of circular reinforced concrete cross sections, *Structural Concrete*, 21 (2020) 1, pp. 48-55. doi: [10.1002/suco.201900139](https://doi.org/10.1002/suco.201900139)
- [21] Kaicheng, Y., Donghua, Z., Chao, S., et al.: Reinforcement Calculation of Circular and Annular Cross Section, *Tehnički Vjesnik*, 27 (2020) 6, pp. 2008-2015. doi: [10.17559/tv-20190709112144](https://doi.org/10.17559/tv-20190709112144)
- [22] Chao, S., Dong-hua, Z., Xu, C., et al.: Simplified calculation method for second-order bearing capacity of circular section columns, *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 50 (2020) 06, pp. 2178-2185. doi: [10.13229/j.cnki.jdxbgxb20190787](https://doi.org/10.13229/j.cnki.jdxbgxb20190787)
- [23] Ou, Y.C., Kurniawan, R.A., Kurniawan, D.P., et al.: Plastic hinge length of circular reinforced concrete columns, *Computers and Concrete, An International Journal*, 10 (2012) 6, pp. 663-681.